গণিত

দাখিল নবম ও দশম শ্রেণি

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ২০১৩ শিক্ষাবর্ষ থেকে
দাখিল নবম ও দশম শ্রেণির পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত

গণিত

দাখিল

নবম ও দশম শ্রেণি

২০২৫ শিক্ষাবর্ষের জন্য পরিমার্জিত

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

প্রসঙ্গ কথা

বর্তমানে প্রাতিষ্ঠানিক শিক্ষার উপযোগ বহুমাত্রিক। শুধু জ্ঞান পরিবেশন নয়, দক্ষ মানবসম্পদ গড়ে তোলার মাধ্যমে সমৃদ্ধ জাতিগঠন এই শিক্ষার মূল উদ্দেশ্য। একই সাথে মানবিক ও বিজ্ঞানমনস্ক সমাজগঠন নিশ্চিত করার প্রধান অবলম্বনও প্রাতিষ্ঠানিক শিক্ষা। বর্তমান বিজ্ঞান ও প্রযুক্তিনির্ভর বিশ্বে জাতি হিসেবে মাথা তুলে দাঁড়াতে হলে আমাদের মানসম্মত শিক্ষা নিশ্চিত করা প্রয়োজন। এর পাশাপাশি শিক্ষার্থীদের দেশপ্রেম, মূল্যবোধ ও নৈতিকতার শক্তিতে উজ্জীবিত করে তোলাও জরুরি।

শিক্ষা জাতির মেরুদণ্ড আর প্রাতিষ্ঠানিক শিক্ষার প্রাণ শিক্ষাক্রম। আর শিক্ষাক্রম বাস্তবায়নের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ উপকরণ হলো পাঠ্যবই। জাতীয় শিক্ষানীতি ২০১০-এর উদ্দেশ্যসমূহ সামনে রেখে গৃহীত হয়েছে একটি লক্ষ্যাভিসারী শিক্ষাক্রম। এর আলোকে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড (এনসিটিবি) মানসম্পন্ন পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন, মুদ্রণ ও বিতরণের কাজটি নিষ্ঠার সাথে করে যাচ্ছে। সময়ের চাহিদা ও বাস্তবতার আলোকে শিক্ষাক্রম, পাঠ্যপুস্তক ও মূল্যায়নপদ্ধতির পরিবর্তন, পরিমার্জন ও পরিশোধনের কাজটিও এই প্রতিষ্ঠান করে থাকে।

বাংলাদেশের শিক্ষার স্তরবিন্যাসে মাধ্যমিক স্তরটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। বইটি এই স্তরের শিক্ষার্থীদের বয়স, মানসপ্রবণতা ও কৌতূহলের সাথে সংগতিপূর্ণ এবং একইসাথে শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য অর্জনের সহায়ক। বিষয়জ্ঞানে সমৃদ্ধ শিক্ষক ও বিশেষজ্ঞগণ বইটি রচনা ও সম্পাদনা করেছেন। আশা করি বইটি বিষয়ভিত্তিক জ্ঞান পরিবেশনের পাশাপাশি শিক্ষার্থীদের মনন ও সৃজনের বিকাশে বিশেষ ভূমিকা রাখবে।

একুশ শতকের এই যুগে জ্ঞান-বিজ্ঞানের বিকাশে গণিতের ভূমিকা অতীব গুরুত্বপূর্ণ। পাশাপাশি ব্যক্তিগত জীবন থেকে শুরু করে পারিবারিক ও সামাজিক জীবনে গণিতের প্রয়োগ অনেক বেড়েছে। এই সব বিষয় বিবেচনায় রেখে মাধ্যমিক পর্যায়ে নবম ও দশম শ্রেণির গণিত পাঠ্যপুস্তকটি সহজ ও সুন্দরভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে এবং বেশ কিছু নতুন বিষয় এতে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে।

পাঠ্যবই যাতে জবরদস্তিমূলক ও ক্লান্তিকর অনুষঙ্গ না হয়ে উঠে বরং আনন্দাশ্রয়ী হয়ে ওঠে, বইটি রচনার সময় সেদিকে সতর্ক দৃষ্টি রাখা হয়েছে। সর্বশেষ তথ্য-উপাত্ত সহযোগে বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়েছে। চেষ্টা করা হয়েছে বইটিকে যথাসম্ভব দুর্বোধ্যতামুক্ত ও সাবলীল ভাষায় লিখতে। ২০২৪ সালের পরিবর্তিত পরিস্থিতিতে প্রয়োজনের নিরিখে পাঠ্যপুস্তকসমূহ পরিমার্জন করা হয়েছে। এক্ষেত্রে ২০১২ সালের শিক্ষাক্রম অনুযায়ী প্রণীত পাঠ্যপুস্তকের সর্বশেষ সংস্করণকে ভিত্তি হিসেবে গ্রহণ করা হয়েছে। বানানের ক্ষেত্রে বাংলা একাডেমির প্রমিত বানানরীতি অনুসৃত হয়েছে। যথাযথ সতর্কতা অবলম্বনের পরেও তথ্য-উপাত্ত ও ভাষাগত কিছু ভুলত্রুটি থেকে যাওয়া অসম্ভব নয়। পরবর্তী সংস্করণে বইটিকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত করার আন্তরিক প্রয়াস থাকবে। এই বইয়ের মানোন্নয়নে যে কোনো ধরনের যৌক্তিক পরামর্শ কৃতজ্ঞতার সাথে গৃহীত হবে।

পরিশেষে বইটি রচনা, সম্পাদনা ও অলংকরণে যাঁরা অবদান রেখেছেন তাঁদের সবার প্রতি কৃতজ্ঞতা জানাই।

অক্টোবর ২০২৪

প্রফেসর ড. এ কে এম রিয়াজুল হাসান

চেয়ারম্যান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

সূচিপত্র

অধ্যায় ১

বাস্তব সংখ্যা (Real Numbers)

সংখ্যার ইতিহাস মানব সভ্যতার ইতিহাসের মতোই প্রাচীন। পরিমাণকে প্রতীক দিয়ে সংখ্যা আকারে প্রকাশ করার পদ্ধতি থেকে গণিতের উৎপত্তি। গ্রিক দার্শনিক এরিস্টটলের মতে, প্রাচীন মিশরের পুরোহিত সম্প্রদায়ের অনুশীলনের মাধ্যমে গণিতের আনুষ্ঠানিক অভিষেক ঘটে। তাই বলা যায় সংখ্যাভিত্তিক গণিতের সৃষ্টি যীশুখ্রিষ্টের জন্মের প্রায় দুই হাজার বছর পূর্বে। এরপর নানা জাতি ও সভ্যতার হাত ঘুরে সংখ্যা ও সংখ্যারীতি অধুনা একটি সর্বজনীন রূপ ধারণ করেছে।

স্বাভাবিক সংখ্যার গণনার প্রয়োজনে প্রাচীন ভারতবর্ষের গণিতবিদগণ সর্বপ্রথম শূন্য ও দশভিত্তিক স্থানীয়মান পদ্ধতির প্রচলন করেন, যা সংখ্যা বর্ণনায় একটি মাইলফলক হিসেবে বিবেচিত হয়। পরে ভারতীয় ও চীনা গণিতবিদগণ শূন্য, ঋণাত্মক, বাস্তব, পূর্ণ ও ভগ্নাংশের ধারণার বিস্তৃতি ঘটান, যা মধ্যযুগে আরবীয় গণিতবিদগণ ভিত্তি হিসেবে গ্রহণ করেন। দশমিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সংখ্যা প্রকাশের কৃতিত্ব মধ্যপ্রাচ্যের মুসলিম গণিতবিদদের বলে মনে করা হয়। আবার তাঁরাই একাদশ শতাব্দীতে সর্বপ্রথম বীজগণিতীয় দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান হিসেবে বর্গমূল আকারে অমূলদ সংখ্যার প্রবর্তন করেন। ইতিহাসবিদদের ধারণা খ্রিস্টপূর্ব ৫০০ অব্দের কাছাকাছি গ্রিক দার্শনিকরাও জ্যামিতিক অঙ্কনের প্রয়োজনে অমূলদ সংখ্যা, বিশেষ করে দুই-এর বর্গমূলের প্রয়োজনীয়তা অনুভব করেছিলেন। ঊনবিংশ শতাব্দীতে ইউরোপীয় গণিতবিদগণ বাস্তব সংখ্যাকে প্রণালিবদ্ধ করে পূর্ণতা দান করেন। দৈনন্দিন প্রয়োজনে বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধে শিক্ষার্থীদের সুস্পষ্ট জ্ঞান থাকা প্রয়োজন। এ অধ্যায়ে বাস্তব সংখ্যা বিষয়ে সামগ্রিক আলোচনা করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস করতে পারবে।
- বাস্তব সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবে।
- দশমিক ভগ্নাংশের শ্রেণিবিন্যাস করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং ভগ্নাংশকে আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে পারবে।
- অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সদৃশ ও বিসদৃশ দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে পারবে এবং এতদসংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস (Classification of Real Numbers)

স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural Number): $1, 2, 3, 4, \ldots$ ইত্যাদি স্বাভাবিক সংখ্যা বা **ধনাত্মক অখণ্ড** সংখ্যা। $2, 3, 5, 7, \ldots$ ইত্যাদি **মৌলিক সংখ্যা** এবং $4, 6, 8, 9, \ldots$ ইত্যাদি **যৌগিক সংখ্যা**। দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার গ.সা.গু. 1 হলে এদেরকে পরস্পরের **সহমৌলিক সংখ্যা** বলা হয়। যেমন 6 ও 35 পরস্পরের সহমৌলিক।

পূর্ণসংখ্যা (Integer): শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাকে **পূর্ণসংখ্যা** বলা হয়। অর্থাৎ $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যা।

ভগ্নাংশ সংখ্যা (Fractional Number): $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যাকে **(সাধারণ) ভগ্নাংশ সংখ্যা** বা সংক্ষেপে **ভগ্নাংশ** বলা হয়, যেখানে $q \neq 0, q \neq 1$ এবং q দ্বারা p নিঃশেষে বিভাজ্য নয়। যেমন $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{4}{6}$ ইত্যাদি (সাধারণ) ভগ্নাংশ সংখ্যা। কোনো (সাধারণ) ভগ্নাংশ $\frac{p}{q}$ এর ক্ষেত্রে $p < q$ হলে ভগ্নাংশটিকে **প্রকৃত ভগ্নাংশ** এবং $p > q$ হলে ভগ্নাংশটিকে **অপ্রকৃত ভগ্নাংশ** বলা হয়। যেমন $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ইত্যাদি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ইত্যাদি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

মূলদ সংখ্যা (Rational Number): $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যাকে **মূলদ সংখ্যা** বলা হয়, যখন p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$। যেমন $\frac{3}{1} = 3, \frac{11}{2} = 5.5, \frac{5}{3} = 1.666\ldots$ ইত্যাদি মূলদ সংখ্যা। যে কোনো মূলদ সংখ্যাকে দুইটি সহমৌলিক সংখ্যার অনুপাত হিসাবেও লেখা যায়। সকল পূর্ণসংখ্যা ও ভগ্নাংশই মূলদ সংখ্যা।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number): যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$, সে সংখ্যাকে **অমূলদ সংখ্যা** বলা হয়। পূর্ণবর্গ নয় এরূপ যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গমূল কিংবা তার ভগ্নাংশ একটি অমূলদ সংখ্যা। যেমন $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$, $\sqrt{3} = 1.732\ldots$, $\frac{\sqrt{5}}{2} = 1.118\ldots$, ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা। কোনো অমূলদ সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায় না।

দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা (Decimal Fractional Number): মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যাকে দশমিক দিয়ে প্রকাশ করা হলে একে **দশমিক ভগ্নাংশ** বলা হয়। যেমন, $3 = 3.0, \frac{5}{2} = 2.5, \frac{10}{3} = 3.3333\ldots$, $\sqrt{3} = 1.732\ldots$, ইত্যাদি দশমিক ভগ্নাংশ। দশমিক বিন্দুর পর অঙ্ক সংখ্যা সসীম হলে, এদেরকে **সসীম দশমিক ভগ্নাংশ** এবং অঙ্ক সংখ্যা অসীম হলে, এদেরকে **অসীম দশমিক ভগ্নাংশ** বলা হয়। যেমন, 0.52, 3.4152 ইত্যাদি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ এবং $\frac{4}{3} = 1.333\ldots, \sqrt{5} = 2.123512367\ldots$, ইত্যাদি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ। আবার, অসীম দশমিক ভগ্নাংশগুলোর মধ্যে দশমিক বিন্দুর পর কিছু

অঙ্কের পুনরাবৃত্তি হলে, তাদেরকে **অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ** এবং অঙ্কগুলোর পুনরাবৃত্তি না হলে এদের **অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ** বলা হয়। যেমন, $\frac{122}{99} = 1.2323\ldots, 5.1\dot{6}5\dot{4}$ ইত্যাদি অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ এবং $0.523050056\ldots, 2.12340314\ldots$ ইত্যাদি অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

বাস্তব সংখ্যা (Real Number): সকল মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যাকে **বাস্তব সংখ্যা** বলা হয়, যেমন নিচের সংখ্যাগুলো বাস্তব সংখ্যা।

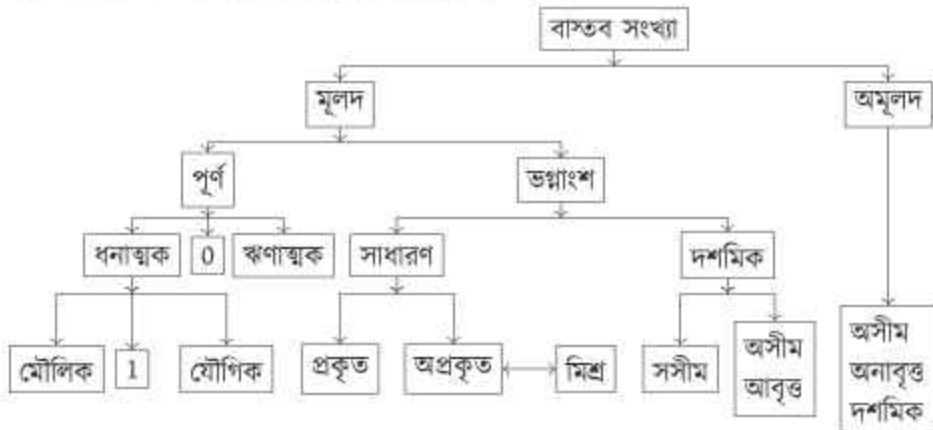
$$0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots \qquad \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{4}{3}, \cdots$$

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \cdots \qquad 1.23, 0.415, 1.3333\ldots, 0.\dot{6}\dot{2}, 4.120345061\ldots$$

ধনাত্মক সংখ্যা (Positive Number): শূন্য থেকে বড় সকল বাস্তব সংখ্যাকে **ধনাত্মক সংখ্যা** বলা হয়। যেমন, $2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{2}, 0.415, 0.\dot{6}\dot{2}, 4.120345061\ldots$ ইত্যাদি ধনাত্মক সংখ্যা।

ঋণাত্মক সংখ্যা (Negative Number): শূন্য থেকে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যাকে **ঋণাত্মক সংখ্যা** বলা হয়। যেমন, $-2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\sqrt{2}, -0.415, -0.\dot{6}\dot{2}, -4.120345061\ldots$ ইত্যাদি ঋণাত্মক সংখ্যা।

অঋণাত্মক সংখ্যা (Non-negative Number): শূন্যসহ সকল ধনাত্মক সংখ্যাকে **অঋণাত্মক সংখ্যা** বলা হয়। যেমন, $0, 3, \frac{1}{2}, 0.612, 1.\dot{3}, 2.120345\ldots$ ইত্যাদি অঋণাত্মক সংখ্যা।

নিচের চিত্রে আমরা বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস দেখতে পাই।

কাজ: বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাসে $\frac{3}{4}, 5, -7, \sqrt{13}, 0, 1, \frac{9}{7}, 12, 2\frac{4}{5}, 1.1234, 0.3\dot{2}\dot{3}$ সংখ্যাগুলোর অবস্থান দেখাও।

উদাহরণ ১. $\sqrt{3}$ এবং 4 এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

মনে করি, $\sqrt{3}$ এবং 4 এর মধ্যে যেকোনো দুইটি অমূলদ সংখ্যা a ও b

যেখানে $a = \sqrt{3} + 1$ এবং $b = \sqrt{3} + 2$

স্পষ্টত: a ও b উভয়ই অমূলদ সংখ্যা এবং উভয়ই $\sqrt{3}$ এবং 4 এর মধ্যে অবস্থিত।

অর্থাৎ $\sqrt{3} < \sqrt{3} + 1 < \sqrt{3} + 2 < 4$

$\therefore$ a ও b দুইটি নির্ণেয় অমূলদ সংখ্যা।

মন্তব্য: এরূপ অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় করা যায়।

বাস্তব সংখ্যার যোগ ও গুণন প্রক্রিয়ার মৌলিক বৈশিষ্ট্য:

১. a, b বাস্তব সংখ্যা হলে, (i) $a + b$ বাস্তব সংখ্যা এবং (ii) ab বাস্তব সংখ্যা

২. a, b বাস্তব সংখ্যা হলে (i) $a + b = b + a$ এবং (ii) $ab = ba$

৩. a, b, c বাস্তব সংখ্যা হলে (i) $(a + b) + c = a + (b + c)$ এবং (ii) $(ab)c = a(bc)$

৪. a বাস্তব সংখ্যা হলে, কেবল দুইটি বাস্তব সংখ্যা 0 ও 1 আছে যেখানে
(i) $0 \neq 1$, (ii) $a + 0 = 0 + a = a$ এবং (iii) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

৫. a বাস্তব সংখ্যা হলে, (i) $a + (-a) = 0$ (ii) $a \neq 0$ হলে, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

৬. a, b, c বাস্তব সংখ্যা হলে, $a(b + c) = ab + ac$

৭. a, b বাস্তব সংখ্যা হলে $a < b$ অথবা $a = b$ অথবা $a > b$

৮. a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$ হলে, $a + c < b + c$

৯. a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$ হলে, (i) $ac < bc$ যখন $c > 0$ (ii) $ac > bc$ যখন $c < 0$

প্রতিজ্ঞা: $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

প্রমাণ: ধরি $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

তাহলে এমন দুইটি পরস্পর সহমৌলিক স্বাভাবিক সংখ্যা $p,\ q > 1$ থাকবে যে, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$।

বা, $2 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে] অর্থাৎ $2q = \frac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত $2q$ পূর্ণসংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা, এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$।

$\therefore 2q$ এবং $\dfrac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $2q \neq \dfrac{p^2}{q}$

$\therefore \sqrt{2}$ কে $\dfrac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যাবে না, অর্থাৎ $\sqrt{2} \neq \dfrac{p}{q}$

$\therefore \sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। $\square$

মন্তব্য: যৌক্তিক প্রমাণের সমাপ্তির চিহ্ন হিসাবে $\square$ ব্যবহার করা হয়।

কাজ: প্রমাণ কর যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ ২. প্রমাণ কর যে, কোনো চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

সমাধান: মনে করি, চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা যথাক্রমে $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$।

ক্রমিক সংখ্যা চারটির গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে পাওয়া যায়,

$$
\begin{aligned}
& x(x+1)(x+2)(x+3)+1 \\
&= x(x+3)(x+1)(x+2)+1 \\
&= (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 \\
&= a(a+2)+1 \ [\text{এবার } x^2+3x=a \text{ ধরে}] \\
&= a^2+2a+1=(a+1)^2 \\
&= (x^2+3x+1)^2
\end{aligned}
$$

যা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা। সুতরাং যে কোনো চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

দশমিক ভগ্নাংশ (Decimal Fractions)

প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায়। যেমন $2 = 2.0,\ \dfrac{2}{5} = 0.4,\ \dfrac{1}{3} = 0.333\ldots$ ইত্যাদি। দশমিক ভগ্নাংশ তিন প্রকার: সসীম, আবৃত্ত এবং অসীম দশমিক ভগ্নাংশ।

সসীম দশমিক ভগ্নাংশ: কোনো সসীম দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানদিকে সসীম সংখ্যক অঙ্ক থাকে। যেমন $0.12,\ 1.023,\ 7.832,\ 54.67,\ \ldots$ ইত্যাদি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ: কোনো আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানদিকের অঙ্কগুলোর সব অথবা পরপর থাকা কিছু অংশ বারবার আসতে থাকে। যেমন, $3.333\ldots,\ 2.454545\ldots,\ 5.12765765\ldots$ ইত্যাদি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

অসীম দশমিক ভগ্নাংশ: কোনো অসীম দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানদিকের অঙ্ক কখনো শেষ হয় না, অর্থাৎ দশমিক বিন্দুর ডানদিকের অঙ্কগুলো সসীম হবে না এবং অংশবিশেষ বারবার আসবে না। যেমন $\sqrt{2} = 1.4142135624\ldots$, $\sqrt{7} = 2.6457513111\ldots$ ইত্যাদি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ।

মন্তব্য: সসীম দশমিক ও আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ হলো মূলদ সংখ্যা এবং অসীম দশমিক ভগ্নাংশ হলো অমূলদ সংখ্যা। কোনো অমূলদ সংখ্যার মান যত দশমিক স্থান পর্যন্ত ইচ্ছা নির্ণয় করা যায়। কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরকে স্বাভাবিক সংখ্যায় প্রকাশ করতে পারলে, ঐ ভগ্নাংশটি মূলদ সংখ্যা।

কাজ: 1.723, $5.2333\ldots$, 0.0025, $2.1356124\ldots$, $0.01050105\ldots$ এবং $0.450123\ldots$ ভগ্নাংশগুলোকে কারণসহ শ্রেণিবিন্যাস কর।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ

```
6)23(3.833
  18
  ---
   50
   48
   ---
    20
    18
    ---
     20
     18
     ---
      2
```

$\frac{23}{6}$ সাধারণ ভগ্নাংশটিকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করি। লক্ষ করি, ভগ্নাংশের লবকে হর দিয়ে ভাগ করে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করার সময় ভাগের প্রক্রিয়া শেষ হয়নি। দেখা যায় যে, ভাগফলে একই অঙ্ক 3 বারবার আসে। এখানে $3.8333\ldots$ একটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

যে সকল দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানে একটি অঙ্ক বারবার আসে বা একাধিক অঙ্ক পর্যায়ক্রমে বারবার আসে, এদের **আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ** বলা হয়। আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশে যে অংশ বারবার অর্থাৎ পুনঃপুন আসে, একে **আবৃত্ত অংশ** আর বাকি অংশকে **অনাবৃত্ত অংশ** বলা হয়।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে একটি অঙ্ক আবৃত্ত হলে, সে অঙ্কের উপর পৌনঃপুনিক বিন্দু এবং একাধিক অঙ্ক আবৃত্ত হলে, কেবলমাত্র প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর পৌনঃপুনিক বিন্দু দেওয়া হয়। যেমন, $2.555\ldots$ কে লেখা হয় $2.\dot{5}$ দ্বারা এবং $3.124124124\ldots$ কে লেখা হয়, $3.\dot{1}2\dot{4}$ দ্বারা।

দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর আবৃত্তাংশ ছাড়া অন্য কোনো অঙ্ক না থাকলে, একে **বিশুদ্ধ পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ** বলা হয় এবং পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর আবৃত্তাংশ ছাড়া এক বা একাধিক অঙ্ক থাকলে, একে **মিশ্র পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ** বলা হয়। যেমন, $1.\dot{3}$ বিশুদ্ধ পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ এবং $4.2351\dot{1}\dot{2}$ মিশ্র পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ।

ভগ্নাংশের হরে 2, 5 ছাড়া অন্য কোনো মৌলিক গুণনীয়ক (উৎপাদক) থাকলে, সেই হর দ্বারা লবকে ভাগ করলে, কখনো নিঃশেষে বিভাজ্য হবে না। যেহেতু পর্যায়ক্রমে ভাগ শেষে 1, 2, …, 9 ছাড়া অন্য কিছু হতে পারে না, সেহেতু এক পর্যায়ে ভাগশেষগুলো বারবার একই সংখ্যা হতে থাকবে। আবৃত্তাংশের অঙ্ক সংখ্যা সবসময় হরে যে সংখ্যা থাকে, এর চেয়ে ছোট হয়।

উদাহরণ ৩. $\frac{3}{11}$ ও $\frac{95}{37}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: নিচে বামপাশে $\frac{3}{11}$ ও ডানপাশে $\frac{95}{37}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করা হয়েছে।

নিচে আসলে ভাগ করা হয়েছে 3 কে। কিন্তু 3, 11 এর চেয়ে ছোট হওয়ায় ভাগফলে 0 ও দশমিক বিন্দু নেওয়ার পরে 3 এর ডানে 0 বসিয়ে 30 হয়েছে।

```
11)30(0.2727
   22
    80
    77
     30
     22
      80
      77
       3
```

$\therefore \frac{3}{11} = 0.2727\ldots = 0.\dot{2}\dot{7}$

```
37)95(2.567567
   74
   210
   185
    250
    222
     280
     259
      210
      185
       250
       222
        280
        259
         21
```

$\therefore \frac{95}{37} = 2.567567\ldots = 2.\dot{5}6\dot{7}$

নির্ণেয় দশমিক ভগ্নাংশগুলো যথাক্রমে $0.\dot{2}\dot{7}$ এবং $2.\dot{5}6\dot{7}$

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিবর্তন

উদাহরণ ৪. $0.\dot{3}$, $0.\dot{2}\dot{4}$, এবং $42.34\dot{7}\dot{8}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: নিচে $0.\dot{3}$, $0.\dot{2}\dot{4}$, এবং $42.34\dot{7}\dot{8}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করা হয়েছে।

$$\text{প্রথমে} \quad 0.\dot{3} = 0.3333\ldots$$
$$0.\dot{3} \times 10 = 0.333\ldots \times 10 = 3.333\ldots$$
$$0.\dot{3} \times 1 = 0.333\ldots \times 1 = 0.333\ldots$$

$$\text{বিয়োগ করে, } 0.\dot{3} \times 10 - 0.\dot{3} \times 1 = 3$$
$$0.\dot{3} \times (10 - 1) = 3$$
$$0.\dot{3} \times 9 = 3$$
$$\therefore 0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{এবার} \quad 0.\dot{2}\dot{4} = 0.24242424\ldots$$
$$0.\dot{2}\dot{4} \times 100 = 0.242424\ldots \times 100 = 24.24242424\ldots$$
$$0.\dot{2}\dot{4} \times 1 = 0.242424\ldots \times 1 = 0.24242424\ldots$$

$$\text{বিয়োগ করে, } 0.\dot{2}\dot{4} \times 99 = 24$$
$$\therefore 0.\dot{2}\dot{4} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$$

$$\text{শেষে} \quad 42.34\dot{7}\dot{8} = 42.34787878\ldots$$
$$42.34\dot{7}\dot{8} \times 10000 = 42.34787878\ldots \times 10000 = 423478.78787878\ldots$$
$$42.34\dot{7}\dot{8} \times 100 = 42.34787878\ldots \times 100 = 4234.7878\ldots$$

$$\text{বিয়োগ করে, } 42.34\dot{7}\dot{8} \times 9900 = 423478 - 4234 = 419244$$
$$\therefore 42.34\dot{7}\dot{8} = \frac{419244}{9900} = \frac{34937}{825} = 42\frac{287}{825}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ ভগ্নাংশগুলো যথাক্রমে $0.\dot{3} = \frac{1}{3}$, $0.\dot{2}\dot{4} = \frac{8}{33}$, $42.34\dot{7}\dot{8} = 42\frac{287}{825}$

ব্যাখ্যা: উপরের তিনটি উদাহরণ থেকে দেখা যায় যে,

- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর যে কয়টি অঙ্ক আছে, সে কয়টি শূন্য 1 এর ডানে বসিয়ে প্রথমে আবৃত্ত দশমিক ভগাংশকে গুণ করা হয়েছে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর যে কয়টি অনাবৃত্ত অঙ্ক আছে, সে কয়টি শূন্য 1 এর ডানে বসিয়ে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে গুণ করা হয়েছে।
- প্রথম গুণফল থেকে দ্বিতীয় গুণফল বিয়োগ করা হয়েছে এবং তাতে ডানপক্ষে পূর্ণসংখ্যা পাওয়া গেছে। এখানে লক্ষণীয় যে, আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক ও পৌনঃপুনিক বিন্দু উঠিয়ে প্রাপ্ত সংখ্যা থেকে অনাবৃত্ত অংশের সংখ্যা বিয়োগ করা হয়েছে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে যতগুলো আবৃত্ত অঙ্ক ছিল ততগুলো 9 লিখে এবং তাদের ডানে দশমিক বিন্দুর পর যতগুলো অনাবৃত্ত অঙ্ক ছিল ততগুলো শূন্য বসিয়ে উপরে প্রাপ্ত বিয়োগফলকে ভাগ

করা হয়েছে।

- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করায় সাধারণ ভগ্নাংশটির হর হলো যতগুলো আবৃত্ত অঙ্ক ততগুলো 9 এবং 9 গুলোর ডানে দশমিক বিন্দুর পর যতগুলো অনাবৃত্ত অঙ্ক ততগুলো শূন্য। আর সাধারণ ভগ্নাংশটির লব হলো আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিক বিন্দু উঠিয়ে যে সংখ্যা পাওয়া গেছে, সে সংখ্যা থেকে আবৃত্তাংশ বাদ দিয়ে বাকি অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যা বিয়োগ করে পাওয়া বিয়োগফল।

মন্তব্য: আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সব সময় সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়। সকল আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ মূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ ৫. $5.23\dot{4}5\dot{7}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান:

$$5.23\dot{4}5\dot{7} = 5.23457457457\ldots$$
$$5.23\dot{4}5\dot{7} \times 100000 = 523457.457457\ldots$$
$$5.23\dot{4}5\dot{7} \times 100 = 523.457457\ldots$$

বিয়োগ করে, $5.23\dot{4}5\dot{7} \times 99900 = 522934$

$$\therefore 5.23\dot{4}5\dot{7} = \frac{522934}{99900} = \frac{261467}{49950} = 5\frac{11717}{49950}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $5\frac{11717}{49950}$

ব্যাখ্যা: দশমিক অংশে পাঁচটি অঙ্ক রয়েছে বলে এখানে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে প্রথমে 100000 (এক এর ডানে পাঁচটি শূন্য) দ্বারা গুণ করা হয়েছে। আবৃত্ত অংশের বামে দশমিক অংশে দুইটি অঙ্ক রয়েছে বলে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে 100 (এক এর ডানে দুইটি শূন্য) দ্বারা গুণ করা হয়েছে। প্রথম গুণফল থেকে দ্বিতীয় গুণফল বিয়োগ করা হয়েছে। এই বিয়োগফলের একদিকে পূর্ণসংখ্যা অন্যদিকে প্রদত্ত আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের মানের $(100000 - 1000) = 99900$ গুণ। উভয় পক্ষকে 99900 দিয়ে ভাগ করে নির্ণেয় সাধারণ ভগ্নাংশ পাওয়া গেল।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তরের নিয়ম:

নির্ণেয় ভগ্নাংশের লব = প্রদত্ত দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দু বাদ দিয়ে প্রাপ্ত পূর্ণসংখ্যা এবং অনাবৃত্ত অংশ দ্বারা গঠিত পূর্ণসংখ্যার বিয়োগফল।

নির্ণেয় ভগ্নাংশের হর = দশমিক বিন্দুর পরে আবৃত্ত অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে ততগুলো নয় (9) এবং অনাবৃত্ত অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে ততগুলো শূন্য (0) দ্বারা গঠিত সংখ্যা।

নিচের উদাহরণগুলোতে এ নিয়ম সরাসরি প্রয়োগ করে কয়েকটি আবৃত্ত দশমিককে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করা হলো।

উদাহরণ ৬. $45.2\dot{3}4\dot{6}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: $45.2\dot{3}4\dot{6} = \dfrac{452346 - 452}{9990} = \dfrac{451894}{9990} = \dfrac{225947}{4995} = 45\dfrac{1172}{4995}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $45\dfrac{1172}{4995}$

উদাহরণ ৭. $32.\dot{5}6\dot{7}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: $32.\dot{5}6\dot{7} = \dfrac{32567 - 32}{999} = \dfrac{32535}{999} = \dfrac{3615}{111} = \dfrac{1205}{37} = 32\dfrac{21}{37}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $32\dfrac{21}{37}$

কাজ: $0.\dot{4}\dot{1}$, $3.04\dot{6}2\dot{3}$, $0.0\dot{1}\dot{2}$ এবং $3.31\dot{2}\dot{4}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর কর।

সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ও অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ

দুই বা ততোধিক আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত ও আবৃত্ত উভয় অংশের অঙ্ক সংখ্যা সমান হলে এদের **সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ** বলে। অন্যথায় এদেরকে **অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ** বলে। যেমন $12.\dot{4}\dot{5}$ ও $6.\dot{3}\dot{2}$; $9.\dot{4}5\dot{3}$ ও $125.\dot{8}9\dot{7}$ সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ। আবার, $0.3\dot{4}5\dot{6}$ ও $7.45\dot{7}8\dot{9}$; $6.43\dot{5}\dot{7}$ ও $2.89\dot{3}4\dot{5}$ অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন

কোনো আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের আবৃত্ত অংশের অঙ্কগুলোকে বারবার লিখলে দশমিক ভগ্নাংশের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। যেমন $6.45\dot{3}\dot{7} = 6.45\dot{3}73\dot{7} = 6.45\dot{3}7\dot{3} = 6.4537\dot{3}\dot{7}$। এখানে প্রত্যেকটিই একই আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $6.45373737\ldots$, যেটি একটি অসীম দশমিক সংখ্যা। এই আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিবর্তন করলে দেখা যাবে প্রত্যেকটি সমান।

$$6.45\dot{3}\dot{7} = \frac{64537 - 645}{9900} = \frac{63892}{9900}$$

$$6.45\dot{3}73\dot{7} = \frac{6453737 - 645}{999900} = \frac{6453092}{999900} = \frac{63892}{9900}$$

$$6.4537\dot{3}\dot{7} = \frac{6453737 - 64537}{990000} = \frac{6389200}{990000} = \frac{63892}{9900}$$

সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করতে হলে ভগ্নাংশগুলোর মধ্যে যে ভগ্নাংশটির অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা বেশি, প্রত্যেকটি ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যাকে ওই ভগ্নাংশটির অনাবৃত্ত অংশের অঙ্কের সংখ্যার সমান করতে হবে এবং বিভিন্ন সংখ্যায় আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যাগুলোর ল.সা.গু. যত, প্রত্যোকটি দশমিক ভগ্নাংশের আবৃত্ত অংশ তত অঙ্কের করতে হবে।

উদাহরণ ৮. $5.\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5}$, ও $10.78\dot{4}2\dot{3}$ কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত কর।

সমাধান: $5.\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5}$, ও $10.78\dot{4}2\dot{3}$ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা যথাক্রমে 0, 1 ও 2। এখানে $10.78\dot{4}2\dot{3}$ এর অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা দশমিকে সবচেয়ে বেশি এবং এ সংখ্যা 2। তাই সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ করতে হলে প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 করতে হবে। $5.\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5}$, ও $10.78\dot{4}2\dot{3}$ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা যথাক্রমে 1, 2 ও 3। 1, 2 ও 3 এর ল.সা.গু হলো 6। তাই সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ করতে হলে প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশের আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 6 করতে হবে। সুতরাং $5.\dot{6} = 5.66\dot{6}6666\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5} = 7.34\dot{5}4545\dot{4}$ ও $10.78\dot{4}2\dot{3} = 10.78\dot{4}2342\dot{3}$। নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশসমূহ যথাক্রমে $5.66\dot{6}6666\dot{6}$, $7.34\dot{5}4545\dot{4}$ ও $10.78\dot{4}2342\dot{3}$

উদাহরণ ৯. 1.7643, $3.\dot{2}\dot{4}$, ও $2.78\dot{3}4\dot{6}$ কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত কর।

সমাধান: 1.7643 এ অনাবৃত্ত অংশ বলতে দশমিক বিন্দুর পরের 4টি অঙ্ক, এখানে আবৃত্ত অংশ নেই। $3.\dot{2}\dot{4}$ এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 0 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2, $2.78\dot{3}4\dot{6}$ এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 3। এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি হলো 4 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 ও 3 এর ল.সা.গু. হলো 6। প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 4 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 6।
$\therefore 1.7643 = 1.7643\dot{0}0000\dot{0}$, $3.\dot{2}\dot{4} = 3.2424\dot{2}4242\dot{4}$ ও $2.78\dot{3}4\dot{6} = 2.7834\dot{6}3463\dot{4}$
নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশসমূহ $1.7643\dot{0}0000\dot{0}$, $3.2424\dot{2}4242\dot{4}$ ও $2.7834\dot{6}3463\dot{4}$

মন্তব্য: সসীম দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করার জন্য দশমিক বিন্দুর সর্বডানের অঙ্কের পর প্রয়োজনীয় সংখ্যক শূন্য বসিয়ে প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দুর পরের অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা সমান করা হয়েছে। আর আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পরের অনাবৃত অঙ্ক সংখ্যা সমান এবং আবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা সমান করা হয়েছে আবৃত্ত অঙ্কগুলো ব্যবহার করে। অনাবৃত্ত অংশের পর যে কোনো অঙ্ক থেকে শুরু করে আবৃত্ত অংশ নেওয়া যায়।

কাজ: 3.467, $2.01\dot{2}4\dot{3}$ এবং $7.52\dot{5}\dot{6}$ কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন কর।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগ বা বিয়োগ করতে হলে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন করতে হবে। এরপর সসীম দশমিক ভগ্নাংশের নিয়মে যোগ বা বিয়োগ করতে হবে। সসীম দশমিক ও আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর মধ্যে যোগ বা বিয়োগ করতে হলে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ করার সময় প্রত্যেকটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে সসীম দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দুর পরের অঙ্ক সংখ্যা ও অন্যান্য আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যার মধ্যে সবচেয়ে বড় যে সংখ্যা সে সংখ্যার সমান। আর আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে যথানিয়মে প্রাপ্ত ল.সা.গু. এর সমান এবং সসীম দশমিক ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে আবৃত্ত অংশের জন্য

প্রয়োজনীয় সংখ্যক শূন্য বসাতে হবে। এরপর সসীম দশমিক ভগ্নাংশের নিয়মে যোগ বা বিয়োগ করতে হবে। এভাবে প্রাপ্ত যোগফল বা বিয়োগফল প্রকৃত যোগফল বা বিয়োগফল হবে না। প্রকৃত যোগফল বা বিয়োগফল বের করতে হলে দেখতে হবে যে সদৃশকৃত দশমিক ভগ্নাংশগুলো যোগ বা বিয়োগ করলে প্রত্যেকটি সদৃশকৃত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর আবৃত্ত অংশের সর্ববামের অঙ্কগুলোর যোগ বা বিয়োগে হাতে যে সংখ্যাটি থাকে, তা প্রাপ্ত যোগফল বা বিয়োগফলের আবৃত্ত অংশের সর্বডানের অঙ্কের সাথে যোগ বা অঙ্ক থেকে বিয়োগ করলে প্রকৃত যোগফল বা বিয়োগফল পাওয়া যাবে। এটিই নির্ণেয় যোগফল বা বিয়োগফল হবে।

মন্তব্য:

১. আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগফল বা বিয়োগফলও আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ হয়। এই যোগফল বা বিয়োগফলে অনাবৃত্ত অংশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর মধ্যে সর্বাপেক্ষা অনাবৃত্ত অংশবিশিষ্ট আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশটির অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যার সমান হবে এবং আবৃত্ত অংশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর আবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যার ল.সা.গু. এর সমান সংখ্যক আবৃত্ত অঙ্ক হবে। সসীম দশমিক ভগ্নাংশ থাকলে প্রত্যেকটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে সসীম দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দুর পরের অঙ্ক সংখ্যা ও অন্যান্য আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যার মধ্যে সবচেয়ে বড় যে সংখ্যা সে সংখ্যার সমান।

২. আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন করে ভগ্নাংশের নিয়মে যোগফল বা বিয়োগফল বের করার পর যোগফল বা বিয়োগফলকে আবার দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন করেও যোগ বা বিয়োগ করা যায়। তবে এ পদ্ধতিতে যোগ বা বিয়োগ করলে বেশি সময় লাগবে।

উদাহরণ ১০. $3.\dot{8}\dot{9}$, $2.1\dot{7}\dot{8}$ ও $5.89\dot{7}9\dot{8}$ যোগ কর।

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক হবে 2, 2 ও 3 এর ল.সা.গু. 6। প্রথমে তিনটি আবৃত্ত দশমিককে সদৃশ করা হয়েছে।

$$
\begin{array}{ll}
3.\dot{8}\dot{9} & = 3.89\dot{8}9898\dot{9} \\
2.1\dot{7}\dot{8} & = 2.17\dot{8}7878\dot{7} \\
5.89\dot{7}9\dot{8} & = 5.89\dot{7}9879\dot{8} \\
\hline
 & \ 11.97576574 \\
 & \ \qquad\quad\ \ +2 \\
\hline
 & \ 11.97\dot{5}7657\dot{6}
\end{array}
$$

[$8+8+7+2=25$, এখানে 2 হাতের 2 এখানে 25 এর 2 যোগ হয়েছে]

নির্ণেয় যোগফল $11.97\dot{5}7657\dot{6}$ বা $11.97\dot{5}7\dot{6}$

মন্তব্য: এই যোগফলে 576576 আবৃত্ত অংশ। কিন্তু কেবল 576 কে আবৃত্ত অংশ করলে মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

দ্রষ্টব্য: সর্বডানে যোগের ধারণা বোঝাবার জন্য এ যোগটি অন্য নিয়মে করা হলো:

$$
\begin{array}{ll}
3.\dot{8}\dot{9} & = 3.89\dot{8}98989\dot{9}|89 \\
2.1\dot{7}\dot{8} & = 2.17\dot{8}7878\dot{7}|87 \\
5.89\dot{7}9\dot{8} & = 5.89\dot{7}9879\dot{8}|79 \\
\hline
 & \, 11.97\dot{5}7657\dot{6}|55
\end{array}
$$

এখানে আবৃত্ত অংশ শেষ হওয়ার পর আরও অঙ্ক পর্যন্ত সংখ্যাকে বাড়ানো হয়েছে। অতিরিক্ত অঙ্কগুলোকে একটা খাড়া রেখা দ্বারা আলাদা করে দেওয়া হয়েছে। এরপর যোগ করা হয়েছে। খাড়া রেখার ডানের অঙ্কের যোগফল থেকে হাতের 2 এসে খাড়া রেখার বামের অঙ্কের সাথে যোগ হয়েছে। খাড়া রেখার ডানের অঙ্কটি আর পৌনঃপুনিক বিন্দু শুরু হওয়ার অঙ্কটি একই। তাই দুইটি যোগফলই এক।

উদাহরণ ১১. $8.9\dot{4}7\dot{8}$, 2.346 ও $4.\dot{7}\dot{1}$ যোগ কর।

সমাধান: দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ করতে হলে অনাবৃত্ত অংশ 3 অঙ্কের এবং আবৃত্ত অংশ হবে 3 ও 2 এর ল.সা.গু. 6 অঙ্কের। এবার দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে যোগ করা হবে।

$$
\begin{array}{llr}
8.9\dot{4}7\dot{8} & = 8.947\dot{8}4784\dot{7} & \\
2.346 & = 2.346\dot{0}0000\dot{0} & \\
4.\dot{7}\dot{1} & = 4.717\dot{1}7171\dot{7} & \\
\hline
 & \, 16.011019564 & [8+0+1+1=10, \text{ এখানে 1 হাতের 1} \\
 & \hfill +1 & \text{এখানে 10 এর 1 যোগ হয়েছে]} \\
\hline
 & \, 16.011\dot{0}1956\dot{5} &
\end{array}
$$

নির্ণেয় যোগফল $16.011\dot{0}1956\dot{5}$।

> **কাজ:** যোগ কর: ক) $2.0\dot{9}\dot{7}$ ও $5.12\dot{7}6\dot{8}$ খ) $1.34\dot{5}$, $0.31\dot{5}7\dot{6}$ ও $8.05\dot{6}7\dot{8}$

উদাহরণ ১২. $8.2\dot{4}\dot{3}$ থেকে $5.24\dot{6}7\dot{3}$ বিয়োগ কর।

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 ও 3 এর ল.সা.গু. 6। এখন দশমিক সংখ্যা দুইটিকে সদৃশ করে বিয়োগ করা হলো।

$$
\begin{array}{llr}
8.2\dot{4}\dot{3} & = 8.24\dot{3}4343\dot{4} & \\
5.24\dot{6}7\dot{3} & = 5.24\dot{6}7367\dot{3} & \\
\hline
 & \, 2.99669761 & [\text{3 থেকে 6 বিয়োগ করলে হাতে 1 নিতে হবে]} \\
 & \hfill -1 & \\
\hline
 & \, 2.99\dot{6}6976\dot{0} &
\end{array}
$$

নির্ণেয় বিয়োগফল $2.99\dot{6}6976\dot{0}$।

মন্তব্য: পৌনঃপুনিক বিন্দু যেখানে শুরু সেখানে বিয়োজন সংখ্যা বিয়োজ্য সংখ্যা থেকে ছোট হলে সব সময় সর্বডানের অঙ্ক থেকে 1 বিয়োগ করতে হবে।

দ্রষ্টব্য: সর্বডানের অঙ্ক থেকে 1 কেন বিয়োগ করা হয় তা বোঝাবার জন্য নিচে অন্যভাবে বিয়োগ করে দেখানো হলো:

$$
\begin{array}{rl}
8.2\dot{4}\dot{3} & = 8.24\dot{3}4343\dot{4}|34 \\
5.24\dot{6}7\dot{3} & = 5.24\dot{6}7367\dot{3}|67 \\
\hline
 & \quad 2.99\dot{6}6976\dot{0}|67
\end{array}
$$

নির্ণেয় বিয়োগফল $2.99\dot{6}6976\dot{0}|67$। এখানে দুইটি বিয়োগফলই এক।

উদাহরণ ১৩. $24.45\dot{6}4\dot{5}$ থেকে $16.\dot{4}3\dot{7}$ বিয়োগ কর।

সমাধান:

$$
\begin{array}{rl}
24.45\dot{6}4\dot{5} & = 24.45\dot{6}4\dot{5} \\
16.\dot{4}3\dot{7} & = 16.43\dot{7}4\dot{3} \\
\hline
 & \quad 8.01902 \\
 & \quad\quad -1 \\
\hline
 & \quad 8.01\dot{9}0\dot{1}
\end{array}
$$

[6 থেকে 7 বিয়োগ করলে হাতে 1 নিতে হবে]

নির্ণেয় বিয়োগফল $8.01\dot{9}0\dot{1}$

দ্রষ্টব্য: সর্বডানের অঙ্ক থেকে 1 কেন বিয়োগ করা হয় তা বোঝাবার জন্য নিচে অন্যভাবে বিয়োগ করে দেখানো হলো।

$$
\begin{array}{rl}
24.45\dot{6}4\dot{5} & = 24.45\dot{6}4\dot{5}|64 \\
16.\dot{4}3\dot{7} & = 16.43\dot{7}4\dot{3}|74 \\
\hline
 & \quad 8.01\dot{9}0\dot{1}|90
\end{array}
$$

কাজ: বিয়োগ কর: ক) $13.12\dot{7}8\dot{4}$ থেকে 10.418 খ) $23.03\dot{9}\dot{4}$ থেকে $9.12\dot{6}4\dot{5}$

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের গুণ ও ভাগ

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করে গুণ বা ভাগের কাজ সমাধা করে প্রাপ্ত ভগ্নাংশটিকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলেই আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর গুণফল বা ভাগফল হবে। সসীম দশমিক ভগ্নাংশ ও আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের মধ্যে গুণ বা ভাগ করতে হলে এ নিয়মেই করতে হবে। তবে ভাগের ক্ষেত্রে ভাজ্য ও ভাজক দুইটিই আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ হলে, উভয়কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ করে নিলে ভাগের কাজ একটু সহজ হয়।

উদাহরণ ১৪. $4.\dot{3}$ কে $5.\dot{7}$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান:

$$4.\dot{3} = \frac{43-4}{9} = \frac{39}{9} = \frac{13}{3}$$

$$5.\dot{7} = \frac{57-5}{9} = \frac{52}{9}$$

$$\therefore 4.\dot{3} \times 5.\dot{7} = \frac{13}{3} \times \frac{52}{9} = \frac{676}{27} = 25.0\dot{3}\dot{7}$$

নির্ণেয় গুণফল $25.0\dot{3}\dot{7}$

উদাহরণ ১৫. $0.2\dot{8}$ কে $42.\dot{1}\dot{8}$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান:

$$0.2\dot{8} = \frac{28-2}{90} = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$$

$$42.\dot{1}\dot{8} = \frac{4218-42}{99} = \frac{4176}{99} = \frac{464}{11}$$

$$\therefore\ 0.2\dot{8} \times 42.\dot{1}\dot{8} = \frac{13}{45} \times \frac{464}{11} = \frac{6032}{495} = 12.1\dot{8}\dot{5}$$

নির্ণেয় গুণফল $12.1\dot{8}\dot{5}$

উদাহরণ ১৬. $2.5 \times 4.3\dot{5} \times 1.2\dot{3}\dot{4}$ কত?

সমাধান:

$$2.5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$4.3\dot{5} = \frac{435-43}{90} = \frac{392}{90}$$

$$1.2\dot{3}\dot{4} = \frac{1234-12}{990} = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495}$$

$$\therefore 2.5 \times 4.3\dot{5} \times 1.2\dot{3}\dot{4} = \frac{5}{2} \times \frac{392}{90} \times \frac{611}{495} = \frac{119756}{8910} = 13.440628\ldots$$

নির্ণেয় গুণফল 13.440628 (প্রায়)

কাজ: ক) $1.1\dot{3}$ কে 2.6 দ্বারা গুণ কর। খ) $0.\dot{2} \times 1.\dot{1}\dot{2} \times 0.0\dot{8}\dot{1} =$ কত?

উদাহরণ ১৭. $7.\dot{3}\dot{2}$ কে $0.2\dot{7}$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান:

$$7.\dot{3}\dot{2} = \frac{732-7}{99} = \frac{725}{99}$$

$$0.2\dot{7} = \frac{27-2}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

$$\therefore 7.\dot{3}\dot{2} \div 0.2\dot{7} = \frac{725}{99} \div \frac{5}{18} = \frac{725}{99} \times \frac{18}{5} = \frac{290}{11} = 26.\dot{3}\dot{6}$$

নির্ণেয় ভাগফল $26.\dot{3}\dot{6}$

উদাহরণ ১৮. $2.\dot{2}71\dot{8}$ কে $1.9\dot{1}\dot{2}$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান:

$$2.\dot{2}71\dot{8} = \frac{22718-2}{9999} = \frac{22716}{9999}$$

$$1.9\dot{1}\dot{2} = \frac{1912-19}{990} = \frac{1893}{990}$$

$$\therefore 2.\dot{2}71\dot{8} \div 1.9\dot{1}\dot{2} = \frac{22716}{9999} \div \frac{1893}{990} = \frac{22716}{9999} \times \frac{990}{1893} = \frac{120}{101} = 1.\dot{1}88\dot{1}$$

নির্ণেয় ভাগফল $1.\dot{1}88\dot{1}$

উদাহরণ ১৯. 9.45 কে $2.8\dot{6}\dot{3}$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান:

$$9.45 = \frac{945}{100} \qquad 2.8\dot{6}\dot{3} = \frac{2863-28}{990} = \frac{2835}{990}$$

$$\therefore 9.45 \div 2.8\dot{6}\dot{3} = \frac{945}{100} \div \frac{2835}{990} = \frac{945}{100} \times \frac{990}{2835} = \frac{189 \times 99}{2 \times 2835} = \frac{33}{10} = 3.3$$

নির্ণেয় ভাগফল 3.3

মন্তব্য: আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের গুণফল ও ভাগফল আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ নাও হতে পারে।

কাজ: ক) $0.\dot{6}$ কে $0.\dot{9}$ দ্বারা ভাগ কর। খ) $0.7\dot{3}\dot{2}$ কে $0.0\dot{2}\dot{7}$ দ্বারা ভাগ কর।

অসীম দশমিক ভগ্নাংশ

অনেক দশমিক ভগ্নাংশ আছে যাদের দশমিক বিন্দুর ডানের অঙ্কের শেষ নেই, আবার এক বা একাধিক অঙ্ক বারবার পর্যায়ক্রমে আসে না, এসব দশমিক ভগ্নাংশকে বলা হয় অসীম দশমিক ভগ্নাংশ। যেমন, $5.134248513942301\ldots$ একটি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ। 2 এর বর্গমূল একটি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ। এখন, 2 এর বর্গমূল বের করি।

```
1 ) 2 ( 1.4142135...
    1
24 ) 100
      96
281 )  400
       281
2824 ) 11900
       11296
28282 )  60400
         56564
282841 )  383600
          282841
2828423 ) 10075900
           8485269
28284265 ) 159063100
           141421325
            17641775
```

এভাবে প্রক্রিয়া অনন্তকাল পর্যন্ত চললেও শেষ হবে না। সুতরাং $\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$ একটি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ।

নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত মান এবং নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান

অসীম দশমিক ভগ্নাংশের কোনো নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত মান বের করা এবং কোনো নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান বের করা একই অর্থ নয়। যেমন $5.4325893\ldots$ এর 'চার দশমিক স্থান পর্যন্ত মান' হবে 5.4325 কিন্তু $5.4325893\ldots$ এর 'চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান' হবে 5.4326। তবে এখানে 'দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান' এবং 'দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান' একই। সসীম দশমিক ভগ্নাংশেও এভাবে আসন্ন মান বের করা যায়।

মন্তব্য: যত দশমিক স্থান পর্যন্ত মান বের করতে হবে, তত দশমিক স্থান পর্যন্ত যে সব অঙ্ক থাকবে হুবহু সে অঙ্কগুলো লিখতে হবে মাত্র। আর যত দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান বের করতে হবে, তার পরবর্তী স্থানটিতে যদি $5, 6, 7, 8$ বা 9 হয়, তবে শেষ স্থানটির অঙ্কের সাথে 1 যোগ করতে হবে। কিন্তু যদি $0, 1, 2, 3$ বা 4 হয়, তবে শেষ স্থানটির অঙ্ক যেমন ছিল তেমনই থাকবে, এক্ষেত্রে 'দশমিক স্থান পর্যন্ত মান' এবং 'দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান' একই। যত দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান বের করতে বলা হবে, দশমিক বিন্দুর পর তার চেয়েও 1 স্থান বেশি পর্যন্ত দশমিক ভগ্নাংশ বের করতে হবে।

উদাহরণ ২০. 13 এর বর্গমূল বের কর এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান লেখ।

সমাধান:

```
3 ) 13 ( 3.605551...
     9
66 ) 400
     396
7205 ) 40000
       36025
72105 ) 397500
        360525
721105 ) 3697500
         3605525
7211101 )  9197500
           7211101
           1986399
```

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $3.605551\ldots$ এবং নির্ণেয় তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 3.606।

উদাহরণ ২১. $4.4623845\ldots$ এর $1, 2, 3, 4$ ও 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত মান ও আসন্ন মান কত?

সমাধান: $4.4623845\ldots$ ভগ্নাংশটির

এক দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.4 এবং এক দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.5

দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.46 এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.46

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.462 এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.462

চার দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.4623 এবং চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.4624

পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.462238 এবং পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.46238

কাজ: 29 এর বর্গমূল নির্ণয় কর ও বর্গমূলের দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান ও আসন্ন মান লিখ।

অনুশীলনী ১

১. নিচের কোনটি অমূলদ সংখ্যা?
ক) $0.\dot{3}$ খ) $\sqrt{\frac{16}{9}}$ গ) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ ঘ) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

২. a, b, c, d চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা হলে নিচের কোনটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা?
ক) $abcd$ খ) $ab + cd$ গ) $abcd + 1$ ঘ) $abcd - 1$

৩. 1 থেকে 10 পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যা কয়টি?

ক) 3 খ) 4 গ) 5 ঘ) 6

৪. কোনটি সকল পূর্ণসংখ্যার সেট?

ক) $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ খ) $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

গ) $\{\ldots, -3, -1\ 0, 1, 3, \ldots\}$ ঘ) $\{0, 1\ 2, 3, 4\}$

৫. বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে

(i) বিজোড় সংখ্যার বর্গ একটি বিজোড় সংখ্যা।

(ii) দুইটি জোড় সংখ্যার গুণফল এর গুণিতক জোড় সংখ্যা।

(iii) পূর্ণবর্গ নয় এমন সংখ্যার বর্গমূল মূলদ সংখ্যা।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৬. তিনটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল সর্বদাই নিচের কোন সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য হবে?

ক) 5 খ) 6 গ) 7 ঘ) 11

৭. a ও b দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যা হলে নিচের কোনটি বিজোড় সংখ্যা?

ক) a^2 খ) b^2 গ) a^2+1 ঘ) b^2+2

৮. a ও b দুইটি পূর্ণসংখ্যা হলে a^2+b^2 এর সাথে নিচের কোনটি যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে?

ক) $-ab$ খ) ab গ) $2ab$ ঘ) ab

৯. প্রমাণ কর যে, প্রতিটি সংখ্যা অমূলদ। ক) $\sqrt{5}$ খ) $\sqrt{7}$ গ) $\sqrt{10}$

১০. ক) 0.31 এবং 0.12 এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

খ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sqrt{2}$ এর মধ্যে একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

১১. ক) প্রমাণ কর যে, যেকোনো বিজোড় পূর্ণসংখ্যার বর্গ একটি বিজোড় সংখ্যা।

খ) প্রমাণ কর যে, দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যার গুণফল 8 (আট) দ্বারা বিভাজ্য।

১২. আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

ক) $\frac{1}{6}$ খ) $\frac{7}{11}$ গ) $3\frac{2}{9}$ ঘ) $3\frac{8}{15}$

১৩. সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

ক) $0.\dot{2}$ খ) $0.\dot{3}\dot{5}$ গ) $0.1\dot{3}$ ঘ) $3.7\dot{8}$ ঙ) $6.2\dot{3}0\dot{9}$

১৪. সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

ক) $2.2\dot{3}$, $5.2\dot{3}\dot{5}$ খ) $7.2\dot{6}$, $4.23\dot{7}$

গ) $5.\dot{7}$, $8.\dot{3}\dot{4}$, $6.\dot{2}4\dot{5}$ ঘ) 12.32, $2.1\dot{9}$, $4.32\dot{5}\dot{6}$

১৫. যোগ কর:

ক) $0.4\dot{5} + 0.1\dot{3}\dot{4}$ খ) $2.0\dot{5} + 8.0\dot{4} + 7.018$ গ) $0.00\dot{6} + 0.\dot{9}\dot{2} + 0.\dot{1}3\dot{4}$

১৬. বিয়োগ কর:

ক) $3.\dot{4} - 2.1\dot{3}$ খ) $5.\dot{1}\dot{2} - 3.4\dot{5}$

গ) $8.49 - 5.3\dot{5}\dot{6}$ ঘ) $19.34\dot{5} - 13.2\dot{3}4\dot{9}$

১৭. গুণ কর:

ক) $0.\dot{3} \times 0.\dot{6}$ খ) $2.\dot{4} \times 0.\dot{8}\dot{1}$ গ) $0.6\dot{2} \times 0.\dot{3}$ ঘ) $42.\dot{1}\dot{8} \times 0.2\dot{8}$

১৮. ভাগ কর:

ক) $0.\dot{3} \div 0.\dot{6}$ খ) $0.3\dot{5} \div 1.\dot{7}$ গ) $2.3\dot{7} \div 0.4\dot{5}$ ঘ) $1.\dot{1}8\dot{5} \div 0.\dot{2}\dot{4}$

১৯. চার দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত সেগুলোর আসন্ন মান লেখ:

ক) 12 খ) $0.\dot{2}\dot{5}$ গ) $1.\dot{3}\dot{4}$ ঘ) $5.1\dot{3}0\dot{2}$

২০. নিচের কোন সংখ্যাগুলো মূলদ এবং কোন সংখ্যাগুলো অমূলদ লিখ:

ক) $0.\dot{4}$ খ) $\sqrt{9}$ গ) $\sqrt{11}$ ঘ) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

ঙ) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$ চ) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$ ছ) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{7}}$ জ) $5.\dot{6}3\dot{9}$

২১. $n = 2x - 1$, যেখানে $x \in N$। দেখাও যে, n^2 কে 8 (আট) দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 1 ভাগশেষ থাকবে।

২২. $\sqrt{5}$ ও 4 দুইটি বাস্তব সংখ্যা।

ক) কোনটি মূলদ ও কোনটি অমূলদ নির্দেশ কর।

খ) $\sqrt{5}$ ও 4 এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

গ) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

২৩. সরল কর:

ক) $(0.\dot{3} \times 0.8\dot{3}) \div (0.5 \times 0.\dot{1}) + 0.3\dot{5} \div 0.0\dot{8}$

খ) $[(6.27 \times 0.5) \div \{(0.5 \times 0.75) \times 8.36\}] \div \{(0.25 \times 0.1) \times (0.75 \times 21.\dot{3}) \times 0.5\}$

অধ্যায় ২

সেট ও ফাংশন (Set and Function)

সেট শব্দটি আমাদের সুপরিচিত যেমন: ডিনার সেট, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, মূলদ সংখ্যার সেট ইত্যাদি। আধুনিক হাতিয়ার হিসাবে সেটের ব্যবহার ব্যাপক। জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (১৮৪৫-১৯১৮) সেট সম্পর্কে প্রথম ধারণা ব্যাখ্যা করেন। তিনি অসীম সেটের ধারণা প্রদান করে গণিত শাস্ত্রে আলোড়ন সৃষ্টি করেন এবং তাঁর সেটের ধারণা সেট তত্ত্ব নামে পরিচিত। এই অধ্যায়ে সেটের ধারণা ব্যবহার করে গাণিতিক যুক্তি ও চিত্রের মাধ্যমে সমস্যা সমাধান এবং ফাংশন সম্পর্কে সম্যক ধারণা দেওয়া হবে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ▶ সেট ও উপসেটের ধারণা ব্যাখ্যা করে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবে।
- ▶ সেট প্রকাশের পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবে।
- ▶ অসীম সেট ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং সসীম ও অসীম সেটের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- ▶ সেটের সংযোগ ও ছেদ ব্যাখ্যা এবং যাচাই করতে পারবে।
- ▶ শক্তি সেট ব্যাখ্যা করতে এবং দুই ও তিন সদস্যবিশিষ্ট সেটের শক্তি সেট গঠন করতে পারবে।
- ▶ ক্রমজোড় ও কার্তেসীয় গুণজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ উদাহরণ ও ভেনচিত্রের সাহায্যে সেট প্রক্রিয়ার সহজ বিধিগুলো প্রমাণ করতে পারবে এবং বিধিগুলো প্রয়োগ করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ▶ অন্বয় ও ফাংশন ব্যাখ্যা করতে ও গঠন করতে পারবে।
- ▶ ডোমেন ও রেঞ্জ কী ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবে।
- ▶ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।

সেট (Set)

বাস্তব বা চিন্তা জগতের সু-সংজ্ঞায়িত বস্তুর সমাবেশ বা সংগ্রহকে সেট বলে। যেমন, নবম-দশম শ্রেণির বাংলা, ইংরেজি ও গণিত বিষয়ে তিনটি পাঠ্য বইয়ের সেট। প্রথম দশটি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, পূর্ণসংখ্যার সেট, বাস্তব সংখ্যার সেট ইত্যাদি। সেটকে সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার বড় হাতের অক্ষর $A, B, C, \ldots X, Y, Z$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন, $2, 4, 6$ সংখ্যা তিনটির সেট $A = \{2, 4, 6\}$

সেটের প্রত্যেক বস্তু বা সদস্যকে সেটের উপাদান (element) বলা হয়। যেমন, $B = \{a, b\}$ হলে, B সেটের উপাদান a এবং b; উপাদান প্রকাশের চিহ্ন $\in$।

$\therefore a \in B$ এবং পড়া হয় a, B এর সদস্য (a belongs to B)

$b \in B$ এবং পড়া হয় b, B এর সদস্য (b belongs to B)

উপরের B সেটে c উপাদান নেই।

$\therefore c \notin B$ এবং পড়া হয় c, B এর সদস্য নয় (c does not belong to B)।

সেট প্রকাশের পদ্ধতি

সেটকে দুই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়। যথা: তালিকা পদ্ধতি (Roster Method বা Tabular Method) ও সেট গঠন পদ্ধতি (Set Builder Method)।

তালিকা পদ্ধতি: এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ করে দ্বিতীয় বন্ধনী $\{\}$ এর মধ্যে আবদ্ধ করা হয় এবং একাধিক উপাদান থাকলে 'কমা' ব্যবহার করে উপাদানগুলোকে আলাদা করা হয়। যেমন, $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{$নিলয়, তিশা, শুভ্রা$\}$ ইত্যাদি।

সেট গঠন পদ্ধতি: এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ না করে উপাদান নির্ধারণের জন্য সাধারণ ধর্মের উল্লেখ থাকে। যেমন: $A = \{x : x$ স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা $\}$, $B = \{x : x$ নবম শ্রেণির প্রথম পাঁচজন শিক্ষার্থী$\}$ ইত্যাদি। এখানে, ':' দ্বারা 'এরূপ যেন' বা সংক্ষেপে 'যেন' (such that) বোঝায়। যেহেতু এ পদ্ধতিতে সেটের উপাদান নির্ধারণের জন্য শর্ত বা নিয়ম (Rule) দেওয়া থাকে, এ জন্য এ পদ্ধতিকে Rule Method ও বলা হয়।

উদাহরণ ১. $A = \{7, 14, 21, 28\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: A সেটের উপাদানসমূহ $7, 14, 21, 28$।

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 7 দ্বারা বিভাজ্য, অর্থাৎ 7 এর গুণিতক এবং 28 এর বড় নয়।

$\therefore A = \{x : x, 7$ এর গুণিতক এবং $0 < x \leq 28\}$

উদাহরণ ২. $B = \{x : x, 28$ এর গুণনীয়ক$\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: এখানে, $28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$

$\therefore 28$ এর গুণনীয়কসমূহ $1, 2, 4, 7, 14, 28$

নির্ণেয় সেট $B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

উদাহরণ ৩. $C = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 18\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

এখানে,

$x = 1$ হলে, $x^2 = 1^2 = 1$; $x = 2$ হলে, $x^2 = 2^2 = 4$

$x = 3$ হলে, $x^2 = 3^2 = 9$; $x = 4$ হলে, $x^2 = 4^2 = 16$

$x = 5$ হলে, $x^2 = 5^2 = 25$; যা 18 এর চেয়ে বড়।

$\therefore$ শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ $1, 2, 3$ এবং 4

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $C = \{1, 2, 3, 4\}$

কাজ:

ক) $C = \{-9, -6, -3, 3, 6, 9\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ) $B = \{y : y$ পূর্ণসংখ্যা এবং $y^3 \leq 18\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সসীম সেট (Finite Set)

যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়, তাকে **সসীম সেট** বলে। যেমন, $D = \{x, y, z\}$, $E = \{3, 6, 9, \ldots, 60\}$, $F = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $30 < x < 70\}$ ইত্যাদি সসীম সেট। এখানে, D সেটে 3টি, E সেটে 20টি এবং F সেটে 9টি উপাদান আছে।

অসীম সেট (Infinite Set)

যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে শেষ করা যায় না, তাকে **অসীম সেট** বলে। যেমন, $A = \{x : x$ বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, পূর্ণসংখ্যার সেট $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$, মূলদ সংখ্যার সেট $Q = \left\{\frac{a}{b} : a\right.$ ও b পূর্ণসংখ্যা এবং $\left. b \neq 0\right\}$, বাস্তব সংখ্যার সেট R ইত্যাদি অসীম সেট।

উদাহরণ ৪. দেখাও যে, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট।

সমাধান: ধরা যাক, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N একটি সসীম সেট। তাহলে এই সেটের অবশ্যই একটি সর্বোচ্চ উপাদান K থাকবে; যেখানে K $\in$N হবে। কিন্তু স্বাভাবিক সংখ্যার ধারণা অনুসারে, K যদি একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হয়, তাহলে K+1 ও একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হবে যা K এর চেয়েও বড়। তাহলে, K+1 অবশ্যই স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এর একটি উপাদান হবে, অর্থাৎ K+1 $\in$ N হবে।

কিন্তু শুরুতে আমরা N সেটের সর্বোচ্চ উপাদান হিসেবে K সংখ্যাটি ধরেছিলাম। পরবর্তীতে দেখা গেল, K+1 সংখ্যাটিও N সেটের একটি উপাদান। একইভাবে দেখানো যায় যে, K+2, K+3 … … সংখ্যাগুলোও N সেটের উপাদান হবে।

সুতরাং, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N সসীম হতে পারে না। তাই স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট।

> **কাজ:** সসীম সেট ও অসীম সেট নির্ণয় কর:
>
> ক) $\{3, 5, 7\}$
>
> খ) $\{1, 2, 2^2, \ldots 2^{10}\}$
>
> গ) $\{3, 3^2, 3^3, \ldots\}$
>
> ঘ) $\{x : x$ পূর্ণসংখ্যা এবং $x < 4\}$
>
> ঙ) $\{\frac{p}{q} : p$ ও q পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1\}$
>
> চ) $\{y : y \in N$ এবং $y^2 < 100 < y^3\}$

ফাঁকা সেট (Empty Set)

যে সেটের কোনো উপাদান নেই তাকে **ফাঁকা সেট** বলে। ফাঁকা সেটকে $\varnothing$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন: একটি বালিকা বিদ্যালয়ের তিনজন ছাত্রের সেট, $\{x \in N : 10 < x < 11\}$, $\{x \in N : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $23 < x < 29\}$ ইত্যাদি।

ভেনচিত্র (Venn-Diagram)

জন ভেন (১৮৩৪-১৯২৩) সেটের কার্যবিধি চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করেন। এতে বিবেচনাধীন সেটগুলোকে সমতলে অবস্থিত বিভিন্ন আকারের জ্যামিতিক চিত্র যেমন আয়ত, বৃত্ত এবং ত্রিভুজ ব্যবহার করা হয়। জন ভেনের নামানুসারে চিত্রগুলো **ভেন চিত্র** নামে পরিচিত।

উপসেট (Subset)

$A = \{a, b\}$ একটি সেট। এই সেটের উপাদান থেকে $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ সেটগুলো গঠন করা যায়। আবার, কোনো উপাদান না নিয়ে $\varnothing$ সেট গঠন কর যায়। এখানে, গঠিত $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\varnothing$ প্রত্যেকটি A সেটের উপসেট। সুতরাং কোনো সেট থেকে যতগুলো সেট গঠন করা যায়, এদের প্রত্যেকটি সেটকে ঐ সেটের উপসেট বলা হয়। উপসেটের চিহ্ন $\subseteq$। যদি B সেট A এর উপসেট হয় তবে $B \subseteq A$ লেখা হয়। B, A এর উপসেট অথবা B is a subset of A। উপরের উপসেটগুলোর মধ্যে $\{a, b\}$ সেট A এর সমান। প্রত্যেকটি সেট নিজের উপসেট। আবার, যেকোনো সেট থেকে $\varnothing$ সেট গঠন করা যায়। $\therefore \varnothing$ যেকোনো সেটের উপসেট।

ধরি $P = \{1, 2, 3\}$ এবং $Q = \{2, 3\}$, $R = \{1, 3\}$ তাহলে P, Q এবং R প্রত্যেকে P এর উপসেট। অর্থাৎ $P \subseteq P$, $Q \subseteq P$ এবং $R \subseteq P$।

প্রকৃত উপসেট (Proper Subset)

কোনো সেট থেকে গঠিত উপসেটের মধ্যে যে উপসেটগুলোর উপাদান সংখ্যা প্রদত্ত সেটের উপাদান সংখ্যা অপেক্ষা কম এদেরকে **প্রকৃত উপসেট** বলে। যেমন, $A = \{3, 4, 5, 6\}$ এবং $B = \{3, 5\}$

দুইটি সেট। এখানে, B এর সব উপাদান A সেটে বিদ্যমান এবং B সেটের উপাদান সংখ্যা A সেটের উপাদান সংখ্যা থেকে কম।

$\therefore B, A$ এর একটি প্রকৃত উপসেট এবং $B \subset A$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

উপসেটের উদাহরণে Q ও R প্রত্যেকে P এর প্রকৃত উপসেট। উল্লেখ্য ফাঁকা সেট বা $\varnothing$ যেকোনো সেটের প্রকৃত উপসেট।

উদাহরণ ৫. $P = \{x, y, z\}$ এর উপসেটগুলো লিখ এবং সেগুলো থেকে প্রকৃত উপসেট বাছাই কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P = \{x, y, z\}$

P এর উপসেটসমূহ $\{x, y, z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \varnothing$।

P এর প্রকৃত উপসেটসমূহ $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \varnothing$।

দ্রষ্টব্য: কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে ওই সেটের উপসেটের সংখ্যা 2^n এবং প্রকৃত উপসেটের সংখ্যা $2^n - 1$।

সেটের সমতা (Equivalent Set)

দুইটি সেটের উপাদান একই হলে, সেট দুইটিকে **সমান** বলা হয়। যেমন: $A = \{3, 5, 7\}$ এবং $B = \{5, 3, 3, 7\}$ দুইটি সমান সেট এবং $A = B$ চিহ্ন দ্বারা লেখা হয়। লক্ষ করি $A = B$ যদি এবং কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়।

আবার, $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{5, 3, 3, 7\}$ এবং $C = \{7, 7, 3, 5, 5\}$ হলে A, B ও C সেট তিনটি সমতা বোঝায়। অর্থাৎ, $A = B = C$।

দ্রষ্টব্য: সেটের উপাদানগুলোর ক্রম বদলালে বা কোনো উপাদান পুনরাবৃত্তি করলে সেটের কোনো পরিবর্তন হয় না।

সেটের অন্তর (Difference of Sets)

মনে করি, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{3, 5\}$। সেট A থেকে সেট B এর উপাদানগুলো বাদ দিলে যে সেটটি হয় তা $\{1, 2, 4\}$ এবং লেখা হয় $A \setminus B$ বা $A - B$ এবং পড়া হয় A বাদ B।

$\therefore A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{3, 5\} = \{1, 2, 4\}$

উদাহরণ ৬. $P = \{x : x,\ 12$ এর গুণনীয়কসমূহ$\}$ এবং $Q = \{x : x, 3$ এর গুণিতক এবং $x \leq 12\}$ হলে $P - Q$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P = \{x : x, 12$ এর গুণনীয়কসমূহ$\}$

এখানে, 12 এর গুণনীয়কসমূহ $1, 2, 3, 4, 6, 12$

$\therefore P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

আবার, $Q = \{x : x, 3$ এর গুণিতক এবং $x \leq 12\}$

এখানে, 12 পর্যন্ত 3 এর গুণিতকসমূহ 3, 6, 9, 12

$\therefore Q = \{3, 6, 9, 12\}$

$\therefore P - Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} - \{3, 6, 9, 12\} = \{1, 2, 4\}$

নির্ণেয় সেট: $\{1, 2, 4\}$

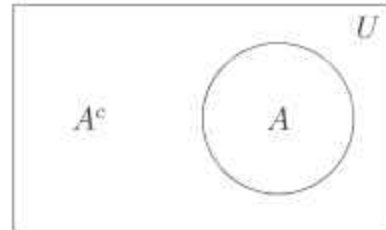
সার্বিক সেট (Universal Set)

আলোচনায় সংশ্লিষ্ট সকল সেট একটি নির্দিষ্ট সেটের উপসেট। যেমন: $A = \{x, y\}$ সেটটি $B = \{x, y, z\}$ এর একটি উপসেট। এখানে, B সেটকে A সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলে।

সুতরাং আলোচনা সংশ্লিষ্ট সকল সেট যদি একটি নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয় তবে ঐ নির্দিষ্ট সেটকে তার উপসেটগুলোর সাপেক্ষে **সার্বিক সেট** বলে।

সার্বিক সেটকে সাধারণত U দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তবে অন্য প্রতীকের সাহায্যেও সার্বিক সেট প্রকাশ করা যায়। যেমন: সকল জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $C = \{2, 4, 6, \ldots\}$ এবং সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ হলে C সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট হবে N।

পূরক সেট (Complement of a Set)

U সার্বিক সেট এবং A সেটটি U এর উপসেট। A সেটের বহির্ভূত সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A সেটের **পূরক সেট** বলে। A এর পূরক সেটকে A^c বা A' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গাণিতিকভাবে $A^c = U \setminus A$।

মনে করি, P ও Q দুইটি সেট এবং P সেটের যেসব উপাদান Q সেটের উপাদান নয়, ঐ উপাদানগুলোর সেটকে P এর প্রেক্ষিতে Q এর পূরক সেট বলা হয় এবং লেখা হয় $Q^c = P \setminus Q$।

উদাহরণ ৭. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6, 7\}$ এবং $B = \{1, 3, 5\}$ হলে A^c ও B^c নির্ণয় কর।

সমাধান: $A^c = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 3, 5\}$

এবং $B^c = U \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6, 7\}$

নির্ণেয় সেট $A^c = \{1, 3, 5\}$ এবং $B^c = \{2, 4, 6, 7\}$

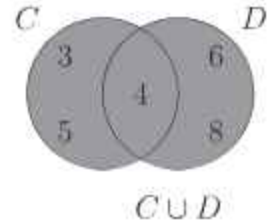
সংযোগ সেট (Union of Sets)

দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে **সংযোগ সেট** বলা হয়। মনে করি, A ও B দুইটি সেট। A ও B সেটের সংযোগকে $A \cup B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A সংযোগ

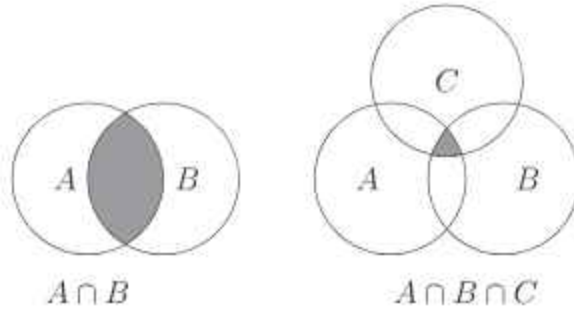
B অথবা A Union B। সেট গঠন পদ্ধতিতে $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$।

উদাহরণ ৮. $C = \{3, 4, 5\}$ এবং $D = \{4, 6, 8\}$ হলে, $C \cup D$ নির্ণয় কর।

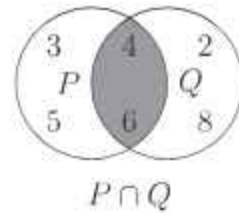
সমাধান: দেওয়া আছে, $C = \{3, 4, 5\}$
এবং $D = \{4, 6, 8\}$
$\therefore C \cup D = \{3, 4, 5\} \cup \{4, 6, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 8\}$
নির্ণেয় সেট: $\{3, 4, 5, 6, 8\}$

$C \cup D$

ছেদ সেট (Intersection of Sets)

দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ছেদ সেট বলে। মনে করি, A ও B দুইটি সেট। A ও B এর ছেদ সেটকে $A \cap B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A ছেদ B বা A intersection B। সেট গঠন পদ্ধতিতে $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$।

$A \cap B$ $A \cap B \cap C$

উদাহরণ ৯. $P = \{x \in N : 2 < x \leq 6\}$ এবং $Q = \{x \in N : x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 8\}$ হলে, $P \cap Q$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,
$P = \{x \in N : 2 < x \leq 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$
$Q = \{x \in N : x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$
$\therefore P \cap Q = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{4, 6\}$
নির্ণেয় সেট $\{4, 6\}$

$P \cap Q$

নিশ্ছেদ সেট (Disjoint Set)

দুইটি সেটের মধ্যে যদি কোনো সাধারণ উপাদান না থাকে তবে সেট দুইটিকে পরস্পর নিশ্ছেদ সেট বলে। মনে করি, A ও B দুইটি সেট। $A \cap B = \varnothing$ হলে A ও B পরস্পর নিশ্ছেদ সেট হবে।

> **কাজ:** $U = \{1, 3, 5, 9, 7, 11\}$, $E = \{1, 5, 9\}$ এবং $F = \{3, 7, 11\}$ হলে, $E^c \cup F^c$ এবং $E^c \cap F^c$ নির্ণয় কর।

শক্তি সেট (Power Sets)

$A = \{m, n\}$ একটি সেট। A সেটের উপসেটসমূহ হলো $\{m, n\}, \{m\}, \{n\}, \varnothing$; এখানে উপসেটসমূহের সেট $\{\{m, n\}, \{m\}, \{n\}, \varnothing\}$ কে A সেটের **শক্তি সেট** বলা হয়। A সেটের শক্তি সেটকে $P(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং কোনো সেটের সকল উপসেট দ্বারা গঠিত সেটকে ঐ সেটের শক্তি সেট বলা হয়।

উদাহরণ ১০. $A = \varnothing$, $B = \{a\}$, $C = \{a, b\}$ সেট তিনটির শক্তি সেটগুলোর উপাদান সংখ্যা কত?

সমাধান: এখানে, $P(A) = \{\varnothing\}$

$\therefore A$ সেটের উপাদান সংখ্যা শূন্য এবং এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা $= 1 = 2^0$

আবার, $P(B) = \{\{a\}, \varnothing\}$

$\therefore B$ সেটের উপাদান সংখ্যা 1 এবং এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা $= 2 = 2^1$

এবং $P(C) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \varnothing\}$

$\therefore C$ সেটের উপাদান সংখ্যা 2 এবং এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা $= 4 = 2^2$

সুতরাং, কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, ঐ সেটের শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে 2^n।

> **কাজ:** $G = \{1, 2, 3\}$ হলে, $P(G)$ নির্ণয় কর। দেখাও যে, $P(G)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^3।

ক্রমজোড় (Ordered Pair)

অষ্টম শ্রেণির আমেনা এবং সুমেনা বার্ষিক পরীক্ষায় মেধা তালিকায় যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় হলো। মেধা অনুসারে তাদেরকে (আমেনা, সুমেনা) জোড়া আকারে লেখা যায়। এরূপ নির্দিষ্ট করে দেওয়া জোড়াকে একটি ক্রমজোড় বলে।

সুতরাং, একজোড়া উপাদানের মধ্যে কোনটি প্রথম অবস্থানে আর কোনটি দ্বিতীয় অবস্থানে থাকবে, তা নির্দিষ্ট করে জোড়া আকারে প্রকাশকে **ক্রমজোড়** বলা হয়।

যদি কোনো ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান বা পদ x এবং দ্বিতীয় উপাদান বা পদ y হয়, তবে ক্রমজোড়টিকে (x, y) দিয়ে প্রকাশ করা হয়। ক্রমজোড় (x, y) ও (a, b) সমান বা $(x, y) = (a, b)$ হবে যদি $x = a$ এবং $y = b$ হয়।

উদাহরণ ১১. $(2x + y, 3) = (6, x - y)$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(2x + y, 3) = (6, x - y)$

ক্রমজোড়ের শর্তমতে,

$2x + y = 6 \cdots\cdots (1)$

$x - y = 3 \cdots\cdots (2)$

সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই, $3x = 9$ বা $x = 3$

সমীকরণ (1) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $6 + y = 6$ বা $y = 0$

$\therefore (x, y) = (3, 0)$

কার্তেসীয় গুণজ (Cartesian Product)

করিম সাহেব তাঁর বাড়ির একটি ঘরের ভিতরের দেওয়ালে সাদা বা নীল রং এবং বাইরের দেওয়ালে লাল বা হলুদ বা সবুজ রঙের লেপন দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। ভিতরের দেওয়ালে রঙের সেট $A =$ {সাদা, নীল} এবং বাইরের দেওয়ালে রঙের সেট $B =$ {লাল, হলুদ ও সবুজ}। করিম সাহেব তাঁর ঘরের রং লেপন (সাদা, লাল), (সাদা, হলুদ), (সাদা, সবুজ), (নীল, লাল), (নীল, হলুদ), (নীল, সবুজ) ক্রমজোড় আকারে দিতে পারেন।

উক্ত ক্রমজোড়ের সেটকে নিচের মতো করে লেখা হয়:

$A \times B =$ {(সাদা, লাল), (সাদা, হলুদ), (সাদা, সবুজ), (নীল, লাল), (নীল, হলুদ), (নীল, সবুজ)}

উপরোক্ত ক্রমজোড়ের সেটটিকেই **কার্তেসীয় গুণজ সেট** বলা হয়।

সেট গঠন পদ্ধতিতে, $A \times B = \{(x, y) : x \in A$ এবং $y \in B\}$

$A \times B$ কে পড়া হয় A ক্রস B।

উদাহরণ ১২. $P = \{1, 2, 3\}, Q = \{3, 4\}, R = P \cap Q$ হলে $P \times R$ এবং $R \times Q$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P = \{1, 2, 3\}, Q = \{3, 4\}$

এবং $R = P \cap Q = \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$

$\therefore P \times R = \{1, 2, 3\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$

এবং $R \times Q = \{3\} \times \{3, 4\} = \{(3, 3), (3, 4)\}$

কাজ:

ক) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}, 1\right) = \left(1, \frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

খ) $P = \{1, 2, 3\}, Q = \{3, 4\}$ এবং $R = \{x, y\}$ হলে, $(P \cup Q) \times R$ এবং $(P \cap Q) \times Q$ নির্ণয় কর।

উদাহরণ ১৩. যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতি ক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে এদের সেট নির্ণয় কর।

সমাধান: যে স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে, সে সংখ্যা হবে 23 অপেক্ষা বড় এবং $311 - 23 = 288$ এবং $419 - 23 = 396$ এর সাধারণ গুণনীয়ক।

মনে করি, 23 অপেক্ষা বড় 288 এর গুণনীয়কসমূহের সেট A।

এখানে, $288 = 1 \times 288 = 2 \times 144 = 3 \times 96 = 4 \times 72 = 6 \times 48 = 8 \times 36 = 9 \times 32 = 12 \times 24 = 16 \times 18$

$\therefore A = \{24, 32, 36, 48, 72, 96, 144, 288\}$

মনে করি, 23 অপেক্ষা বড় 396 এর গুণনীয়কসমূহের সেট B।

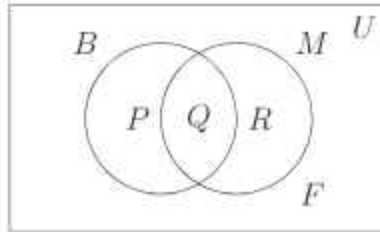
এখানে, $396 = 1 \times 396 = 2 \times 198 = 3 \times 132 = 4 \times 99 = 6 \times 66 = 9 \times 44 = 11 \times 36 = 12 \times 33 = 18 \times 22$

$\therefore B = \{33, 36, 44, 66, 99, 132, 198, 396\}$

$\therefore A \cap B = \{24, 32, 36, 48, 72, 96, 144, 288\} \cap \{33, 36, 44, 66, 99, 132, 198, 396\}$

$\therefore A \cap B = \{36\}$

নির্ণেয় সেট $\{36\}$

উদাহরণ ১৪. 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 88 জন বাংলায়, 80 জন গণিতে এবং 70 জন উভয় বিষয়ে পাশ করেছে। ভেনচিত্রের সাহায্যে তথ্যগুলো প্রকাশ কর এবং কতজন শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান: ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 100 জন শিক্ষার্থীর সেট U এবং বাংলায় ও গণিতে পাস শিক্ষার্থীদের সেট যথাক্রমে B ও M দ্বারা নির্দেশ করে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে P, Q, R, F দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।

এখানে, উভয় বিষয়ে পাশ শিক্ষার্থীদের সেট $Q = B \cap M$, যার সদস্য সংখ্যা 70

$P =$ শুধু বাংলায় পাশ শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 88 - 70 = 18$

$R =$ শুধু গণিতে পাশ শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 80 - 70 = 10$

$P \cup Q \cup R = B \cup M$, যেকোনো একটি বিষয়ে এবং উভয় বিষয়ে পাশ শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 18 + 10 + 70 = 98$

$F =$ উভয় বিষয়ে ফেল করা শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 100 - 98 = 2$

$\therefore$ উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 2 জন শিক্ষার্থী।

অনুশীলনী ২.১

১. নিচের সেটগুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

ক) $\{x \in N : x^2 > 9$ এবং $x^3 < 130\}$

খ) $\{x \in Z : x^2 > 5$ এবং $x^3 \leq 36\}$

গ) $\{x \in N : x, 36$ এর গুণনীয়ক এবং 6 এর গুণিতক $\}$

ঘ) $\{x \in N : x^3 > 25$ এবং $x^4 < 264\}$

২. নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

ক) $\{3, 5, 7, 9, 11\}$

খ) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

গ) $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

ঘ) $\{\pm 4, \pm 5, \pm 6\}$

৩. $A = \{2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, a\}$ এবং $C = \{2, a, b\}$ হলে, নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর:

ক) $B \setminus C$ খ) $A \cup B$ গ) $A \cap C$

ঘ) $A \cup (B \cap C)$ ঙ) $A \cap (B \cup C)$

৪. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ হলে, নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই কর:

ক) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

খ) $(B \cap C)' = B' \cup C'$

গ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

ঘ) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

৫. $Q = \{x, y\}$ এবং $R = \{m, n, l\}$ হলে, $P(Q)$ এবং $P(R)$ নির্ণয় কর।

৬. $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ এবং $C = A \cup B$ হলে, দেখাও যে, $P(C)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n, যেখানে n হচ্ছে C এর উপাদান সংখ্যা।

৭. ক) $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$ হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

খ) $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় কর।

গ) $(6x-y, 13) = (1, 3x+2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

৮. ক) $P = \{a\}, Q = \{b, c\}$ হলে, $P \times Q$ এবং $Q \times P$ নির্ণয় কর।

খ) $A = \{3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6\}$ এবং $C = \{x, y\}$ হলে, $(A \cap B) \times C$ নির্ণয় কর।

গ) $P = \{3, 5, 7\}, Q = \{5, 7\}$ এবং $R = P \setminus Q$ হলে, $(P \cup Q) \times R$ নির্ণয় কর।

৯. A ও B যথাক্রমে 35 এবং 45 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $A \cup B$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।

১০. যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে, এদের সেট নির্ণয় কর।

১১. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে। দুইটি খেলাই পছন্দ করে এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা 10। কতজন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে না তা ভেন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

১২. 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 65 শিক্ষার্থী বাংলায়, 48 শিক্ষার্থী বাংলা ও ইংরেজি উভয় বিষয়ে পাশ এবং 15 শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে।

ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ওপরের তথ্যগুলো ভেনচিত্রে প্রকাশ কর।

খ) শুধু বাংলায় ও ইংরেজিতে পাশ করেছে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

গ) উভয় বিষয়ে পাশ এবং উভয় বিষয়ে ফেল সংখ্যাদ্বয়ের মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট দুইটির সংযোগ সেট নির্ণয় কর।

অন্বয় (Relation)

আমরা জানি, বাংলাদেশের রাজধানী ঢাকা, ভারতের রাজধানী নয়াদিল্লি এবং থাইল্যান্ডের রাজধানী ব্যাংকক। এখানে দেশের সাথে রাজধানীর একটি অন্বয় বা সম্পর্ক আছে। এ সম্পর্ক হচ্ছে দেশ-রাজধানী অন্বয়। উক্ত সম্পর্ককে সেট আকারে নিম্নরূপে দেখানো যায়:

অর্থাৎ দেশ-রাজধানীর অন্বয় = {(বাংলাদেশ, ঢাকা), (ভারত, নয়াদিল্লি), (থাইল্যান্ড, ব্যাংকক)}।

যদি A ও B দুইটি সেট হয় তবে সেটদ্বয়ের কার্তেসীয় গুণজ $A \times B$ সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলোর অশূন্য উপসেট R কে A সেট হতে B সেটের একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়। এখানে, R সেট $A \times B$ সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ, $R \subseteq A \times B$

উদাহরণ ১৫. মনে করি, $A = \{3, 5\}$ এবং $B = \{2, 4\}$

$\therefore A \times B = \{3, 5\} \times \{2, 4\} = \{(3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$

$\therefore R \subseteq \{(3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$

যখন A সেটের একটি উপাদান x ও B সেটের একটি উপাদান y এবং $(x, y) \in R$ হয় তবে লেখা হয় $x \ R \ y$ এবং পড়া হয় x, y এর সাথে অন্বিত (x is related to y) অর্থাৎ উপাদান x, উপাদান y এর সাথে R সম্পর্কযুক্ত।

যদি $x > y$ শর্ত হয় তবে, $R = \{(3, 2), (5, 2), (5, 4)\}$

এবং যদি $x < y$ শর্ত হয় তবে, $R = \{(3, 4)\}$

আবার, A সেট হতে A সেটের একটি অন্বয় অর্থাৎ $R \subseteq A \times A$ হলে, R কে A এর অন্বয় বলা হয়।

A এবং B দুইটি সেটের উপাদানগুলোর মধ্যে সম্পর্ক দেওয়া থাকলে $x \in A$ এর সংগে সম্পর্কিত $y \in B$ নিয়ে যে সব ক্রমজোড় (x, y) পাওয়া যায়, এদের অশূন্য উপসেট হচ্ছে একটি অন্বয়।

উদাহরণ ১৬. যদি $P = \{2, 3, 4\}$, $Q = \{4, 6\}$ এবং P ও Q এর উপাদানগুলোর মধ্যে $y = 2x$ সম্পর্ক বিবেচনায় থাকে তবে সংশ্লিষ্ট অন্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P = \{2, 3, 4\}$ এবং $Q = \{4, 6\}$

প্রশ্নানুসারে, $R = \{(x, y) : x \in P, y \in Q$ এবং $y = 2x\}$

এখানে, $P \times Q = \{2, 3, 4\} \times \{4, 6\} = \{(2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (4, 4), (4, 6)\}$

$\therefore R = \{(2, 4), (3, 6)\}$

নির্ণেয় অন্বয় $\{(2, 4), (3, 6)\}$

উদাহরণ ১৭. যদি $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ এবং A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x = y - 1$ সম্পর্ক বিবেচনায় থাকে, তবে সংশ্লিষ্ট অন্বয় বর্ণনা কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$

প্রশ্নানুসারে, অন্বয় $R = \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং $x = y - 1\}$

এখানে, $A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{0, 2, 4\}$

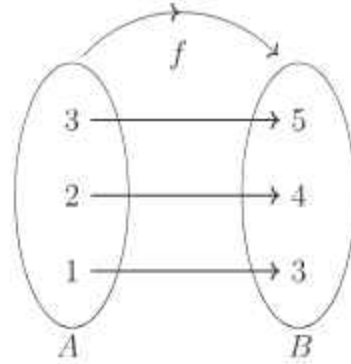
$= \{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (3, 0), (3, 2), (3, 4)\}$

$\therefore R = \{(1, 2), (3, 4)\}$

কাজ: যদি $C = \{2, 5, 6\}$, $D = \{4, 5\}$ এবং C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x \leq y$ সম্পর্ক বিবেচনায় থাকে তবে সংশ্লিষ্ট অন্বয় নির্ণয় কর।

ফাংশন (Function)

নিচের A ও B সেটের অন্বয় লক্ষ করি:

যখন $y = x + 2$, তখন
$x = 1$ হলে, $y = 3$
$x = 2$ হলে, $y = 4$
$x = 3$ হলে, $y = 5$

অর্থাৎ x এর একটি মানের জন্য y এর মাত্র একটি মান পাওয়া যায় এবং x ও y-এর মধ্যে সম্পর্ক তৈরি হয় $y = x + 2$ দ্বারা। সুতরাং দুইটি চলক x এবং y এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত যেন x এর যেকোনো একটি মানের জন্য y এর একটি মাত্র মান পাওয়া যায়, তবে y কে x এর **ফাংশন** বলা হয়। x এর ফাংশনকে সাধারণত y, $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মনে করি, $y = x^2 - 2x + 3$ একটি ফাংশন। এখানে, x এর যে কোনো একটি মানের জন্য y এর একটি মাত্র মান পাওয়া যাবে। এখানে, x এবং y উভয়ই চলক, তবে x এর মানের উপর y এর মান নির্ভরশীল। কাজেই x হচ্ছে **স্বাধীন চলক** এবং y হচ্ছে **অধীন চলক**।

উদাহরণ ১৮. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ হলে, $f(-1)$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$\therefore f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$

উদাহরণ ১৯. যদি $g(x) = x^3 + ax^2 - 3x - 6$ হয়, তবে a এর কোন মানের জন্য $g(-2) = 0$?

সমাধান: দেওয়া আছে, $g(x) = x^3 + ax^2 - 3x - 6$

$\therefore g(-2) = (-2)^3 + a(-2)^2 - 3(-2) - 6$

$= -8 + 4a + 6 - 6 = 4a - 8$

প্রশ্নানুসারে $g(-2) = 0$

$\therefore 4a - 8 = 0$ বা, $4a = 8$ বা, $a = 2$

$\therefore a = 2$ হলে, $g(-2) = 0$ হবে।

ডোমেন (Domain) ও রেঞ্জ (Range)

কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে এর **ডোমেন** এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে এর **রেঞ্জ** বলা হয়।

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে R একটি অন্বয় অর্থাৎ $R \subseteq A \times B$। R এ অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট হবে R এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট হবে R এর রেঞ্জ। R এর ডোমেনকে ডোম R এবং রেঞ্জকে রেঞ্জ R লিখে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ২০. অন্বয় $S = \{(2,1),(2,2),(3,2),(4,5)\}$ অন্বয়টির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $S = \{(2,1),(2,2),(3,2),(4,5)\}$

S অন্বয়ে ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ $2,2,3,4$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ $1,2,2,5$।

$\therefore$ ডোম $S = \{2,3,4\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{1,2,5\}$

উদাহরণ ২১. $A = \{0,1,2,3\}$ এবং $R = \{(x,y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x+1\}$ হলে, R কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং ডোম R ও রেঞ্জ R নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $R = \{(x,y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x+1\}$

R এর বর্ণিত শর্ত থেকে পাই, $y = x+1$।

এখন, প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = x+1$ এর মান নির্ণয় করি।

x	0	1	2	3
y	1	2	3	4

যেহেতু $4 \notin A$, কাজেই $(3,4) \notin R$। $\therefore R = \{(0,1),(1,2),(2,3)\}$

$\therefore$ ডোম $R = \{0,1,2\}$ এবং রেঞ্জ $R = \{1,2,3\}$

কাজ:

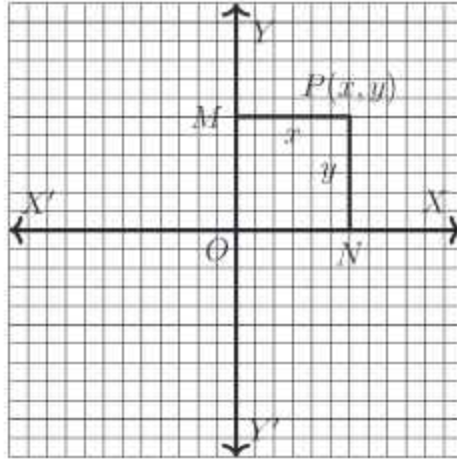
ক) $S = \{(-3,8),(-2,3),(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,3)\}$ হলে S এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ) $S = \{(x,y) : x,y \in A$ এবং $y - x = 1\}$, যেখানে $A = \{-3,-2,-1,0\}$ হলে, ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর।

ফাংশনের লেখচিত্র (Graph of a Function)

ফাংশনের চিত্ররূপকে **লেখচিত্র** বলা হয়। ফাংশনের ধারণা সুস্পষ্ট করার ক্ষেত্রে লেখচিত্রের গুরুত্ব অপরিসীম। ফরাসি দার্শনিক ও গণিতবিদ রেনে দেকার্ত (Rene Descartes: 1596-1650) সর্বপ্রথম বীজগণিত ও জ্যামিতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনে অগ্রণী ভূমিকা পালন করেন। তিনি কোনো সমতলে পরস্পর লম্বভাবে ছেদী দুইটি রেখার সাহায্যে বিন্দুর অবস্থান সুনির্দিষ্টভাবে নির্ণয়ের মাধ্যমে সমতলীয়

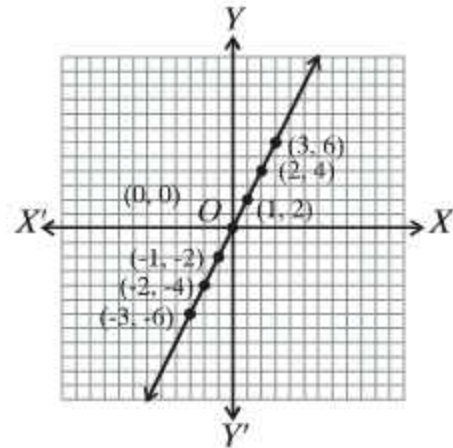
জ্যামিতিতে আধুনিক ধারা প্রবর্তন করেন। তিনি পরস্পর লম্বভাবে ছেদী সরলরেখা দুইটিকে অক্ষরেখা হিসেবে আখ্যায়িত করেন এবং অক্ষদ্বয়ের ছেদ বিন্দুকে মূলবিন্দু বলেন। কোনো সমতলে পরস্পর লম্বভাবে ছেদী দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' আঁকা হলো। সমতলে অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর অবস্থান এই রেখাদ্বয়ের মাধ্যমে সম্পূর্ণরূপে জানা সম্ভব। এই রেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে **অক্ষ** (axis) বলা হয়। অনুভূমিক রেখা XOX' কে x-**অক্ষ**, উল্লম্ব রেখা YOY' কে y-**অক্ষ** এবং অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু O কে **মূলবিন্দু** (Origin) বলা হয়।

দুইটি অক্ষের সমতলে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে অক্ষদ্বয়ের লম্ব দূরত্বের যথাযথ চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে ঐ বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** বলা হয়। মনে করি, অক্ষদ্বয়ের সমতলে অবস্থিত P যেকোনো বিন্দু। P থেকে XOX' এবং YOY' এর উপর যথাক্রমে PN ও PM লম্ব টানি। ফলে, $PM = ON$ যা YOY' হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব এবং $PN = OM$ যা XOX' হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব। যদি $PM = x$ এবং $PN = y$ হয়, তবে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)।

এখানে, x কে **ভুজ** (abscissa) বা x **স্থানাঙ্ক** এবং y কে **কোটি** (ordinate) বা y **স্থানাঙ্ক** বলা হয়। উল্লেখিত স্থানাঙ্ককে **কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক** বলা হয়। কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে সহজেই ফাংশনের জ্যামিতিক চিত্র দেখানো যায়। এজন্য সাধারণত x অক্ষ বরাবর স্বাধীন চলকের মান ও y অক্ষ বরাবর অধীন চলকের মান বসানো হয়।

$y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য ডোমেন থেকে স্বাধীন চলকের কয়েকটি মানের জন্য অধীন চলকের অনুরূপ মানগুলো বের করে ক্রমজোড় তৈরি করি। অতঃপর ক্রমজোড়গুলো উক্ত তলে স্থাপন করি। প্রাপ্ত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে রেখা টেনে যুক্ত করি, যা $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র।

উদাহরণ ২২. $y = 2x$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর, যেখানে, $-3 \leq x \leq 3$

সমাধান: $-3 \leq x \leq 3$ ডোমেনের x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর সংশ্লিষ্ট মান নির্ণয় করে তালিকা তৈরি করি।

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

ছক কাগজে প্রতি ক্ষুদ্রবর্গের বাহুকে একক ধরে, তালিকার বিন্দুগুলো চিহ্নিত করি ও মুক্তহস্তে যোগ করি। তাহলেই পাওয়া গেল লেখচিত্র।

উদাহরণ ২৩. $f(y) = \dfrac{y^3 - 3y^2 + 1}{y(1-y)}$ হলে দেখাও যে $f\left(\dfrac{1}{y}\right) = f(1-y)$

সমাধান: $f(y) = \dfrac{y^3 - 3y^2 + 1}{y(1-y)}$

$$\therefore f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 1}{\frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{y}\right)} = \frac{\frac{1-3y+y^3}{y^3}}{\frac{y-1}{y^2}}$$

$$= \frac{1-3y+y^3}{y^3} \times \frac{y^2}{y-1} = \frac{1-3y+y^3}{y(y-1)}$$

আবার, $f(1-y) = \dfrac{(1-y)^3 - 3(1-y)^2 + 1}{(1-y)(1-(1-y))}$

$$= \frac{1 - 3y + 3y^2 - y^3 - 3(1 - 2y + y^2) + 1}{(1-y)(1-1+y)}$$

$$= \frac{1 - 3y + 3y^2 - y^3 - 3 + 6y - 3y^2 + 1}{y(1-y)}$$

$$= \frac{-1 + 3y - y^3}{y(1-y)} = \frac{-(1-3y+y^3)}{-y(y-1)}$$

$$= \frac{1-3y+y^3}{y(y-1)}$$

$\therefore f\left(\dfrac{1}{y}\right) = f(1-y)$ দেখানো হলো।

উদাহরণ ২৪. সার্বিক সেট $U = \{x : x \in N$ এবং $x \leq 6\}$, $A = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $x \leq 5\}$, $B = \{x : x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 6\}$ এবং $C = A \setminus B$

ক) A^c নির্ণয় কর

খ) দেখাও যে, $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

গ) দেখাও যে, $(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, $U = \{x : x \in N$ এবং $x \leq 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $x \leq 5\} = \{2, 3, 5\}$

$\therefore\ A^c = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 3, 5\} = \{1, 4, 6\}$

খ) দেওয়া আছে,

$B = \{x : x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 6\} = \{2, 4, 6\}$

$\therefore\ A \cup B = \{2, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \cdots\cdots (1)$

$A \setminus B = \{2, 3, 5\} - \{2, 4, 6\} = \{3, 5\}$

$B \setminus A = \{2, 4, 6\} - \{2, 3, 5\} = \{4, 6\}$

$A \cap B = \{2, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2\}$

$\therefore\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = \{3, 5\} \cup \{4, 6\} \cup \{2\} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \cdots (2)$

সুতরাং (1) ও (2) তুলনা করে পাই,

$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

গ) (2) হতে পাই,

$C = A \setminus B = \{3, 5\}$

$A \cap C = \{2, 3, 5\} \cap \{3, 5\} = \{3, 5\}$

$\therefore (A \cap C) \times B = \{3, 5\} \times \{2, 4, 6\}$

$= \{(3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\} \cdots\cdots (3)$

$A \times B = \{2, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\}$

$= \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$

$C \times B = \{3, 5\} \times \{2, 4, 6\}$

$= \{(3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$

$\therefore\ (A \times B) \cap (C \times B)$

$$= \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$$
$$\cap \{(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$$
$$= \{(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\} \cdots\cdots (4)$$

সুতরাং (3) ও (4) তুলনা করে পাই,

$(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$

উদাহরণ ২৫. $A = \{4,5,6,7\}$, $B = \{0,1,2,3\}$ এবং $R = \{(x,y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x+1\}$

ক) দেখাও যে, A ও B সেটদ্বয় পরস্পর নিশ্ছেদ সেট।

খ) $P(B)$ নির্ণয় করে দেখাও যে $P(B)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে, যেখানে n, B এর উপাদান সংখ্যা।

গ) R অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে তার ডোমেন নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, $A = \{4,5,6,7\}$ এবং $B = \{0,1,2,3\}$

$\therefore\ A \cap B = \{4,5,6,7\} \cap \{0,1,2,3\} = \varnothing$

যেহেতু $A \cap B = \varnothing$

সুতরাং, A ও B সেটদ্বয় পরস্পর নিশ্ছেদ সেট।

খ) দেওয়া আছে,

$B = \{0,1,2,3\}$

$$\therefore\ P(B) = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0.3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},$$
$$\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,2,3\},\{1,2,3\},\{0,1,2,3\},\varnothing\}$$

এখানে B এর উপাদান সংখ্যা 4 এবং এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা $2^4 = 16$

$\therefore B$ এর উপাদান সংখ্যা n হলে এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে 2^n।

$\therefore P(B)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n সূত্রকে সমর্থন করে।

গ) দেওয়া আছে, $R = \{(x,y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x+1\}$ এবং $A = \{4,5,6,7\}$

R এর বর্ণিত শর্ত থেকে পাই, $y = x+1$

এখন, প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = x+1$ এর মান নির্ণয় করে একটি তালিকা তৈরি করি।

x	4	5	6	7
y	5	6	7	8

যেহেতু $8 \notin A$, কাজেই $(7, 8) \notin R$

$\therefore\ R = \{(4,5), (5,6), (6,7)\}$

ডোম $R = \{4, 5, 6\}$

অনুশীলনী ২.২

১. 8 এর গুণনীয়ক সেট কোনটি?

ক) $\{8, 16, 24, \cdots\}$ খ) $\{1, 2, 4, 8\}$
গ) $\{2, 4, 8\}$ ঘ) $\{1, 2\}$

২. সেট C হতে সেট B এ একটি সম্পর্ক R হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $R \subset C$ খ) $R \subset B$ গ) $R \subseteq C \times B$ ঘ) $C \times B \subseteq R$

৩. $A = \{1, 2\}, B = \{2, 5\}$ হলে $P(A \cap B)$ এর সদস্য সংখ্যা নিচের কোনটি?

ক) 1 খ) 2 গ) 3 ঘ) 8

৪. নিচের কোনটি $\{x \in N : 13 < x < 17$ এবং x মৌলিক সংখ্যা$\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে?

ক) $\varnothing$ খ) $\{0\}$ গ) $\{\varnothing\}$ ঘ) $\{13, 17)\}$

৫. $A \cup B = \{a, b, c\}$ হলে

(i) $A = \{a, b\},\ B = \{a, b, c\}$

(ii) $A = \{a, b, c\},\ B = \{b, c\}$

(iii) $A = \{a, b\},\ B = \{c\}$

উপর্যুক্ত তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii গ) i ও ii ঘ) i, ii ও iii

৬. A ও B দুইটি সসীম সেটের জন্য

(i) $A \times B = \{(x, y) : x \in A$ এবং $y \in B\}$

(ii) $n(A) = a, n(B) = b$ হলে $n(A \times B) = ab$

(iii) $A \times B$ এর প্রতিটি সদস্য একটি ক্রমজোড়।

উপর্যুক্ত তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

$A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ হলে, নিচের ৭ - ৯ প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

৭. A সেটের সঠিক প্রকাশ কোনটি?

ক) $\{x \in N : 6 < x < 13\}$ খ) $\{x \in N : 6 \leq x < 13\}$
গ) $\{x \in N : 6 \leq x \leq 13\}$ ঘ) $\{x \in N : 6 < x \leq 13\}$

৮. A সেটের মৌলিক সংখ্যাগুলোর সেট কোনটি?

ক) $\{6, 8, 10, 12\}$ খ) $\{7, 9, 11, 13\}$ গ) $\{7, 11, 13\}$ ঘ) $\{9, 12\}$

৯. A সেটের 3 এর গুণিতকগুলোর সেট কোনটি?

ক) $\{6, 9\}$ খ) $\{6, 11\}$ গ) $\{9, 12\}$ ঘ) $\{6, 9, 12\}$

১০. যদি $A = \{3, 4\}, B = \{2, 4\}$, $x \in A$ এবং $y \in B$ হয়, তবে A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x > y$ সম্পর্ক বিবেচনা করে অন্বয়টি নির্ণয় কর।

১১. যদি $C = \{2, 5\}, D = \{4, 6, 7\}$, $x \in C$ এবং $y \in D$ হয়, তবে C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x + 1 < y$ সম্পর্কটি বিবেচনায় থাকে তবে অন্বয়টি নির্ণয় কর।

১২. $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে, $f(-1), f(2)$ এবং $f\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

১৩. যদি $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ হয়, তবে k এর কোন মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে?

১৪. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ হয়, তবে x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?

১৫. যদি $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তবে $\frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1}$ এর মান নির্ণয় কর।

১৬. $g(x) = \frac{1 + x^2 + x^4}{x^2}$ হলে, দেখাও যে $g\left(\frac{1}{x^2}\right) = g(x^2)$

১৭. নিচের অন্বয়গুলো থেকে ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

ক) $R = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

খ) $S = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

গ) $F = \{(\frac{1}{2}, 0), (1, 1), (1, -1), (\frac{5}{2}, 2), (\frac{5}{2}, -2)\}$

১৮. নিচের অন্বয়গুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

ক) $R = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$ যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

খ) $F = \{(x, y) : x \in C, y \in C$ এবং $y = 2x\}$ যেখানে $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

১৯. ছক কাগজে $(-3, 2), (0, -5), \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$ বিন্দুগুলো স্থাপন কর।

২০. ছক কাগজে $(1, 2), (-1, 1), (11, 7)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করে দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

২১. সার্বিক সেট $U = \{x : x \in N$ এবং x বিজোড় সংখ্যা $\}$

$A = \{x : x \in N$ এবং $2 \leq x \leq 7\}$

$B = \{x : x \in N$ এবং $3 < x < 6\}$

$C = \{x : x \in N$ এবং $x^2 > 5$ এবং $x^3 < 130\}$

ক) A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

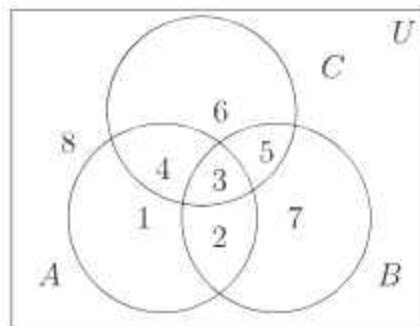
খ) A' এবং $C \setminus B$ নির্ণয় কর।

গ) $B \times C$ এবং $P(A \cap C)$ নির্ণয় কর।

২২. ভেনচিত্রটি লক্ষ করি:

ক) B সেটকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ) উদ্দীপক ব্যবহার করে $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ সম্পর্কটির সত্যতা যাচাই কর।

গ) $S = (B \cup C)^c \times A$ হলে, ডোম S নির্ণয় কর।

২৩. $y = f(x) = \dfrac{4x - 7}{2x - 4}$ একটি ফাংশন।

ক) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $\dfrac{f(x) + 2}{f(x) - 1}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) দেখাও যে, $f(y) = x$

২৪. নিচের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

ক) $y=3x+5$

খ) $x+y=2$

অধ্যায় ৩

বীজগাণিতিক রাশি (Algebraic Expressions)

[এই অধ্যায়ের প্রয়োজনীয় পূর্বজ্ঞান বইয়ের শেষে পরিশিষ্ট অংশে সংযুক্ত আছে। প্রথমে পরিশিষ্ট অংশ পাঠ/আলোচনা করতে হবে।]

বীজগণিতে অনেক সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র ব্যবহৃত হয়। আবার অনেক বীজগাণিতিক রাশি বিশ্লেষণ করে উৎপাদকের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়ে থাকে। তাই এ অধ্যায়ে বীজগাণিতিক সূত্রের সাহায্যে সমস্যা সমাধান এবং রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বিষয়ক বিষয়বস্তু শিক্ষার্থীর উপযোগী করে উপস্থাপন করা হয়েছে। অধিকন্তু নানাবিধ গাণিতিক সমস্যা বীজগাণিতিক সূত্রের সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেও সমাধান করা যায়। পূর্বের শ্রেণিতে বীজগাণিতিক সূত্রাবলি ও এদের সাথে সম্পৃক্ত অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে ঐগুলো পুনরুল্লেখ করা হলো এবং উদাহরণের মাধ্যমে এদের কতিপয় প্রয়োগ দেখানো হলো। এছাড়াও এ অধ্যায়ে বর্গ ও ঘনের সম্প্রসারণ, ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ এবং বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্রের গঠন ও প্রয়োগ সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ▶ বীজগাণিতিক সূত্র প্রয়োগ করে বর্গ ও ঘন রাশির সম্প্রসারণ করতে পারবে।
- ▶ ভাগশেষ উপপাদ্য কী ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং তা প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- ▶ বাস্তব সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগাণিতিক সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

বীজগাণিতিক রাশি

সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক এবং প্রক্রিয়া চিহ্ন এর অর্থবোধক বিন্যাসকে **বীজগাণিতিক রাশি** বলা হয়। যেমন, $2a + 3b - 4c$ একটি বীজগাণিতিক রাশি। বীজগাণিতিক রাশিতে $a, b, c, p, q, r, m, n, x, y, z, \ldots$ ইত্যাদি বর্ণের মাধ্যমে বিভিন্ন তথ্য প্রকাশ করা হয়। বীজগাণিতিক রাশি সংবলিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে এই সমস্ত বর্ণকে ব্যবহার করা হয়। পাটিগণিতে শুধু ধনাত্মক সংখ্যা ব্যবহৃত হয়, অন্যদিকে বীজগণিতে শূন্যসহ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সকল সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। **বীজগণিতকে পাটিগণিতের সর্বায়নকৃত (generalized) রূপ বলা হয়।**

বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত সংখ্যাগুলো **ধ্রুবক** (constant), এদের মান নির্দিষ্ট। আর অক্ষর প্রতীকগুলো **চলক** (variables), এদের মান নির্দিষ্ট নয়, এরা বিভিন্ন মান ধারণ করতে পারে।

বর্গ সংবলিত সূত্রাবলি

বীজগাণিতিক প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যেকোনো সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে **বীজগাণিতিক সূত্র** বলা হয়। সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণিতে বীজগাণিতিক সূত্রাবলি ও এতদসংক্রান্ত অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে ঐগুলো পুনরুল্লেখ করে কতিপয় প্রয়োগ দেখানো হলো।

সূত্র ১. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

সূত্র ২. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

মন্তব্য: সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে দেখা যায় যে, $a^2 + b^2$ এর সাথে $2ab$ অথবা $-2ab$ যোগ করলে একটি পূর্ণবর্গ, অর্থাৎ $(a+b)^2$ অথবা $(a-b)^2$ পাওয়া যায়। সূত্র ১ এ b এর স্থলে $-b$ বসালে সূত্র ২ পাওয়া যায়: $\{a+(-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$ অর্থাৎ, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$।

অনুসিদ্ধান্ত ১. $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ২. $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৩. $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

প্রমাণ: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = (a-b)^2 + 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৪. $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

প্রমাণ: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a+b)^2 - 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৫. $a^2 + b^2 = \dfrac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$

প্রমাণ: সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

যোগ করে, $2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$

বা, $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$

সুতরাং, $(a^2 + b^2) = \dfrac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$ □

অনুসিদ্ধান্ত ৬. $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

প্রমাণ: সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

বিয়োগ করে, $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

বা, $ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$

সুতরাং, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ □

মন্তব্য: অনুসিদ্ধান্ত ৬ প্রয়োগ করে যেকোনো দুইটি রাশির গুণফলকে ঐ দুইটি রাশির সমষ্টির অর্ধেকের বর্গ হতে ঐ দুইটি রাশির অন্তরের অর্ধেকের বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা যায়।

সূত্র ৩. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফল = রাশি দুইটির যোগফল × রাশি দুইটির বিয়োগফল

সূত্র ৪. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

অর্থাৎ, $(x+a)(x+b) = x^2 +$ (a ও b এর বীজগাণিতিক যোগফল) x + (a ও b এর গুণফল)

বর্গসূত্রের সম্প্রসারণ: $a+b+c$ রাশিটিতে তিনটি পদ আছে। একে $(a+b)$ এবং c এ দুইটি পদের সমষ্টিরূপে বিবেচনা করা যায়। অতএব, সূত্র ১ প্রয়োগ করে রাশিটির বর্গ করে পাই,

$$(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

সূত্র ৫. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

অনুসিদ্ধান্ত ৭. $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac)$

অনুসিদ্ধান্ত ৮. $2(ab+bc+ac) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

দ্রষ্টব্য: সূত্র ৫ প্রয়োগ করে পাই,

ক) $(a+b-c)^2 = \{a+b+(-c)\}^2$
$= a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2b(-c) + 2a(-c)$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$

খ) $(a-b+c)^2 = \{a+(-b)+c\}^2$
$= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac$
$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$

গ) $(a-b-c)^2 = \{a+(-b)+(-c)\}^2$
$= a^2+(-b)^2+(-c)^2+2a(-b)+2(-b)(-c)+2a(-c)$
$= a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac$

উদাহরণ ১. $(4x+5y)$ এর বর্গ কত?

সমাধান: $(4x+5y)^2 = (4x)^2+2\times(4x)\times(5y)+(5y)^2 = 16x^2+40xy+25y^2$

উদাহরণ ২. $(3a-7b)$ এর বর্গ কত?

সমাধান: $(3a-7b)^2 = (3a)^2-2\times(3a)\times(7b)+(7b)^2 = 9a^2-42ab+49b^2$

উদাহরণ ৩. বর্গের সূত্র প্রয়োগ করে 996 এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান: $(996)^2 = (1000-4)^2 = (1000)^2-2\times1000\times4+4^2$
$= 1000000-8000+16 = 1000016-8000 = 992016$

উদাহরণ ৪. $a+b+c+d$ এর বর্গ কত?

সমাধান: $(a+b+c+d)^2 = \{(a+b)+(c+d)\}^2$
$= (a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$
$= a^2+2ab+b^2+2(ac+ad+bc+bd)+c^2+2cd+d^2$
$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$

কাজ: সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর:

ক) $3xy+2ax$ খ) $4x-3y$ গ) $x-5y+2z$

উদাহরণ ৫. সরল কর:

$(5x+7y+3z)^2+2(7x-7y-3z)(5x+7y+3z)+(7x-7y-3z)^2$

সমাধান: ধরি, $5x+7y+3z=a$ এবং $7x-7y-3z=b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2+2\cdot b\cdot a+b^2 = a^2+2ab+b^2$
$= (a+b)^2$
$= \{(5x+7y+3z)+(7x-7y-3z)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (5x+7y+3z+7x-7y-3z)^2$
$= (12x)^2 = 144x^2$

উদাহরণ ৬. $x - y = 2$ এবং $xy = 24$ হলে, $x + y$ এর মান কত?

সমাধান: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = (2)^2 + 4 \times 24 = 4 + 96 = 100$

$\therefore x + y = \pm\sqrt{100} = \pm 10$

উদাহরণ ৭. যদি $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 3$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 3$ হয়, তবে $a^2 + b^2$ এর মান কত?

সমাধান: $a^4 + a^2b^2 + b^4$

$= (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$

$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore 3 = 3(a^2 - ab + b^2)$ [মান বসিয়ে]

বা, $a^2 - ab + b^2 = \frac{3}{3} = 1$

এখন, $a^2 + ab + b^2 = 3$ এবং $a^2 - ab + b^2 = 1$

যোগ করে পাই, $2(a^2 + b^2) = 4$

বা, $a^2 + b^2 = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore a^2 + b^2 = 2$

উদাহরণ ৮. প্রমাণ কর যে, $(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

সমাধান: $(a+b)^4 - (a-b)^4$

$= \{(a+b)^2\}^2 - \{(a-b)^2\}^2$

$= \{(a+b)^2 + (a-b)^2\}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\}$

$= 2(a^2 + b^2) \times 4ab$ [অনুসিদ্ধান্ত ৫ এবং অনুসিদ্ধান্ত ৬ ব্যবহার করে]

$= 8ab(a^2 + b^2)$

$\therefore (a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

উদাহরণ ৯. $a + b + c = 15$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ হলে, $ab + bc + ac$ এর মান কত?

সমাধান: প্রথম পদ্ধতি:

$2(ab + bc + ac) = (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = (15)^2 - 83 = 225 - 83 = 142$

$\therefore ab + bc + ac = \frac{142}{2} = 71$

বিকল্প পদ্ধতি:

$(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ac)$

বা, $(15)^2 = 83 + 2(ab+bc+ac)$

বা, $225 - 83 = 2(ab+bc+ac)$

বা, $2(ab+bc+ac) = 142$

$\therefore ab+bc+ac = \dfrac{142}{2} = 71$

উদাহরণ ১০. $a+b+c=2$ এবং $ab+bc+ac=1$ হলে, $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$ এর মান কত?

সমাধান: $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$= a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2$

$= (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)+(a^2+b^2+c^2)$

$= (a+b+c)^2+(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$= (2)^2+(2)^2-2\times 1 = 4+4-2 = 8-2 = 6$

উদাহরণ ১১. $(2x+3y)(4x-5y)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: ধরি, $2x+3y=a$ এবং $4x-5y=b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $ab = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

$= \left(\dfrac{2x+3y+4x-5y}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{2x+3y-4x+5y}{2}\right)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \left(\dfrac{6x-2y}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{8y-2x}{2}\right)^2 = \left\{\dfrac{2(3x-y)}{2}\right\}^2 - \left\{\dfrac{2(4y-x)}{2}\right\}^2$

$= (3x-y)^2-(4y-x)^2$

$\therefore (2x+3y)(4x-5y) = (3x-y)^2-(4y-x)^2$

কাজ:

ক) সরল কর: $(4x+3y)^2+2(4x+3y)(4x-3y)+(4x-3y)^2$

খ) $x+y+z=12$ এবং $x^2+y^2+z^2=50$ হলে, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৩.১

১. সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর:

ক) $2a + 3b$ খ) $x^2 + \frac{2}{y^2}$ গ) $4y - 5x$

ঘ) $5x^2 - y$ ঙ) $3b - 5c - 2a$ চ) $ax - by - cz$

ছ) $2a + 3x - 2y - 5z$ জ) 1007

২. সরল কর:

ক) $(7p + 3q - 5r)^2 - 2(7p + 3q - 5r)(8p - 4q - 5r) + (8p - 4q - 5r)^2$

খ) $(2m + 3n - p)^2 + (2m - 3n + p)^2 - 2(2m + 3n - p)(2m - 3n + p)$

গ) $6.35 \times 6.35 + 2 \times 6.35 \times 3.65 + 3.65 \times 3.65$

ঘ) $\frac{2345 \times 2345 - 759 \times 759}{2345 - 759}$

৩. $a - b = 4$ এবং $ab = 60$ হলে, $a + b$ এর মান কত?

৪. $a + b = 9m$ এবং $ab = 18m^2$ হলে, $a - b$ এর মান কত?

৫. $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$।

৬. $2x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

৭. $a + \frac{1}{a} = 2$ হলে, দেখাও যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$

৮. $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2 + b^2) = 24$

৯. $a + b + c = 9$ এবং $ab + bc + ca = 31$ হলে, $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

১০. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab + bc + ca = 8$ হলে, $(a + b + c)^2$ এর মান কত?

১১. $a + b + c = 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ হলে, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 =$ কত?

১২. $x = 3$, $y = 4$ এবং $z = 5$ হলে, $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx =$ কত?

১৩. $(a + 2b)(3a + 2c)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

১৪. $x^2 + 10x + 24$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

১৫. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$ হলে, ক) $a^2 + b^2$, খ) ab এর মান কত?

ঘন সংবলিত সূত্রাবলি

সূত্র ৬. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

প্রমাণ: $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$

$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$= a^3+b^3+3ab(a+b)$ □

অনুসিদ্ধান্ত ৯. $a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$

সূত্র ৭. $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

প্রমাণ: $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$

$= (a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$= a^3-b^3-3ab(a-b)$ □

দ্রষ্টব্য: সূত্র ৬ এ b এর স্থলে $-b$ বসালে সূত্র ৭ পাওয়া যায়:

$\{a+(-b)\}^3 = a^3+(-b)^3+3a(-b)\{a+(-b)\}$

অর্থাৎ, $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

অনুসিদ্ধান্ত ১০. $a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$

সূত্র ৮. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

প্রমাণ: $a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$

$= (a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)$

$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$ □

সূত্র ৯. $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

প্রমাণ: $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$= (a-b)\{(a-b)^2 + 3ab\}$

$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$

$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ □

উদাহরণ ১২. $2x + 3y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান: $(2x+3y)^3$

$= (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x(3y)^2 + (3y)^3$

$= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot 9y^2 + 27y^3$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

উদাহরণ ১৩. $2x - y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান: $(2x-y)^3$

$= (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 - y^3$

$= 8x^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 - y^3$

$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

কাজ: সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর:
ক) $3x + 2y$ খ) $3x - 4y$ গ) 397

উদাহরণ ১৪. $x = 37$ হলে, $8x^3 + 72x^2 + 216x + 216$ এর মান কত?

সমাধান: $8x^3 + 72x^2 + 216x + 216$

$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 6 + 3 \cdot 2x \cdot (6)^2 + (6)^3$

$= (2x+6)^3 = (2 \times 37 + 6)^3$ [মান বসিয়ে]

$= (74+6)^3 = (80)^3 = 512000$

উদাহরণ ১৫. যদি $x - y = 8$ এবং $xy = 5$ হয়, তবে $x^3 - y^3 + 8(x+y)^2$ এর মান কত?

সমাধান: $x^3 - y^3 + 8(x+y)^2$

$= (x-y)^3 + 3xy(x-y) + 8\{(x-y)^2 + 4xy\}$

$= (8)^3 + 3 \times 5 \times 8 + 8(8^2 + 4 \times 5)$ [মান বসিয়ে]

$= 8^3 + 15 \times 8 + 8(8^2 + 4 \times 5)$

$$= 8^3 + 15 \times 8 + 8 \times 84$$
$$= 8(8^2 + 15 + 84) = 8(64 + 15 + 84)$$
$$= 8 \times 163 = 1304$$

উদাহরণ ১৬. যদি $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3 + \dfrac{1}{a^3} = 18\sqrt{3}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$ [লব ও হরকে $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ দ্বারা গুণ করে]
$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$
$$\therefore a + \frac{1}{a} = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

এখন, $a^3 + \dfrac{1}{a^3} = \left(a + \dfrac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \dfrac{1}{a}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$

$$= (2\sqrt{3})^3 - 3(2\sqrt{3}) \left[\because a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{3}\right]$$
$$= 2^3 \cdot (\sqrt{3})^3 - 3 \times 2\sqrt{3} = 8 \cdot 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$

$= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১৭. $x + y = 5,\ xy = 6$ হলে এবং $x > y$ হলে

ক) $2(x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $x^3 - y^3 - 3(x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর ।

গ) $x^5 + y^5$ এর মান নির্ণয় কর ।

সমাধান:

ক) আমরা জানি, $2(x^2 + y^2) = 2\{(x + y)^2 - 2xy\}$

$$= 2(5^2 - 2 \cdot 6) = 2 \times 13 = 26$$
$$\therefore 2(x^2 + y^2) = 26$$

খ) দেওয়া আছে $x + y = 5$ এবং $xy = 6,\ x > y$

$\therefore x - y = \sqrt{(x + y)^2 - 4xy}$ (প্রদত্ত শর্ত মোতাবেক ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়)

$$= \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{25 - 24} = \sqrt{1} = 1$$

$x^3 - y^3 - 3(x^2 + y^2)$

$$= (x-y)^3 + 3xy(x-y) - \frac{3}{2} \cdot 2(x^2 + y^2)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 6 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 26$$

$$= 1 + 18 - 39$$

$$= -20$$

$\therefore x^3 - y^3 - 3(x^2 + y^2) = -20$

গ) $x + y = 5$ এবং $x - y = 1$

যোগ করে, $2x = 6 \quad \therefore x = \frac{6}{2} = 3$

বিয়োগ করে, $2y = 4 \quad \therefore y = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore x^5 + y^5 = 3^5 + 2^5 = 243 + 32 = 275$

কাজ:

ক) $x = -2$ হলে, $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ এর মান কত?

খ) $a + b = 5$ এবং $ab = 6$ হলে, $a^3 + b^3 + 4(a-b)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ হলে, $x^3 + \frac{8}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৩.২

১. সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর:

ক) $2x^2 + 3y^2$ খ) $7m^2 - 2n$ গ) $2a - b - 3c$

২. সরল কর:

ক) $(7x + 3b)^3 - (5x + 3b)^3 - 6x(7x + 3b)(5x + 3b)$

খ) $(a + b + c)^3 - (a - b - c)^3 - 6(b + c)\{a^2 - (b + c)^2\}$

গ) $(m + n)^6 - (m - n)^6 - 12mn(m^2 - n^2)^2$

ঘ) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (y + z)(y^2 - yz + z^2) + (z + x)(z^2 - zx + x^2)$

ঙ) $(2x + 3y - 4z)^3 + (2x - 3y + 4z)^3 + 12x\{4x^2 - (3y - 4z)^2\}$

২০২৫

৩. $a-b=5$ এবং $ab=36$ হলে, a^3-b^3 এর মান কত?

৪. যদি $a^3-b^3=513$ এবং $a-b=3$ হয়, তবে ab এর মান কত?

৫. $x=19$ এবং $y=-12$ হলে, $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$ এর মান নির্ণয় কর।

৬. যদি $a=15$ হয়, তবে $8a^3+60a^2+150a+130$ এর মান কত?

৭. যদি $a+b=m$, $a^2+b^2=n$ এবং $a^3+b^3=p^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $m^3+2p^3=3mn$।

৮. $a+b=3$ এবং $ab=2$ হলে, (ক) a^2-ab+b^2 এবং (খ) a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর।

৯. $a-b=5$ এবং $ab=36$ হলে, (ক) a^2+ab+b^2 এবং (খ) a^3-b^3 এর মান নির্ণয় কর।

১০. $m+\frac{1}{m}=a$ হলে, $m^3+\frac{1}{m^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

১১. $x-\frac{1}{x}=p$ হলে, $x^3-\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

১২. যদি $a-\frac{1}{a}=1$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3-\frac{1}{a^3}=4$।

১৩. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে দেখাও যে,

ক) $a^3+b^3+c^3=3abc$।

খ) $\frac{(b+c)^2}{3bc}+\frac{(c+a)^2}{3ca}+\frac{(a+b)^2}{3ab}=1$।

১৪. $p-q=r$ হলে, দেখাও যে, $p^3-q^3-r^3=3pqr$।

১৫. $2x-\frac{2}{x}=3$ হলে, দেখাও যে, $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$।

১৬. $a=\sqrt{6}+\sqrt{5}$ হলে, $\frac{a^6-1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

১৭. $x-\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ যেখানে $x\neq 0$

ক) প্রমাণ কর যে, $x^2-\sqrt{3}x=1$।

খ) প্রমাণ কর যে, $23\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=5\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$।

গ) $x^6+\frac{1}{x^6}$ এর মান নির্ণয় কর।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ (Factorization)

কোনো রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হলে, শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির **উৎপাদক** বা **গুণনীয়ক** বলা হয়। কোনো বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদকগুলো নির্ণয় করার পর রাশিটিকে লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফলরূপে প্রকাশ করাকে **উৎপাদকে বিশ্লেষণ** বলা হয়। বীজগাণিতিক রাশিগুলো এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট (বহুপদী) হতে পারে। সেজন্য উক্ত রাশির উৎপাদকগুলোও এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট হতে পারে। এখানে উৎপাদক নির্ণয়ের কতিপয় কৌশল আলোচনা করা হবে।

সাধারণ উৎপাদক: কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদে কোনো সাধারণ উৎপাদক থাকলে তা বের করে নিতে হয়। যেমন:

উদাহরণ ১৮. $3a^2b + 6ab^2 + 12a^2b^2 = 3ab(a + 2b + 4ab)$

উদাহরণ ১৯. $2ab(x - y) + 2bc(x - y) + 3ca(x - y) = (x - y)(2ab + 2bc + 3ca)$

পূর্ণবর্গ: একটি রাশিকে পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করেও উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

উদাহরণ ২০. $4x^2 + 12x + 9$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + (3)^2$

$= (2x + 3)^2 = (2x + 3)(2x + 3)$

উদাহরণ ২১. $9x^2 - 30xy + 25y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $9x^2 - 30xy + 25y^2$

$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5y + (5y)^2$

$= (3x - 5y)^2 = (3x - 5y)(3x - 5y)$

দুইটি বর্গের অন্তর: একটি রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করে এবং $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ সূত্র প্রয়োগ করেও উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

উদাহরণ ২২. $a^2 - 1 + 2b - b^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $a^2 - 1 + 2b - b^2 = a^2 - (b^2 - 2b + 1)$

$= a^2 - (b - 1)^2 = \{a + (b - 1)\}\{a - (b - 1)\}$

$= (a + b - 1)(a - b + 1)$

উদাহরণ ২৩. $a^4 + 64b^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $a^4 + 64b^4 = (a^2)^2 + (8b^2)^2$

$= (a^2)^2 + 2 \times a^2 \times 8b^2 + (8b^2)^2 - 16a^2b^2$

$= (a^2+8b^2)^2 - (4ab)^2$

$= (a^2+8b^2+4ab)(a^2+8b^2-4ab)$

$= (a^2+4ab+8b^2)(a^2-4ab+8b^2)$

কাজ: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
ক) $abx^2+acx^3+adx^4$ খ) $xa^2-144xb^2$ গ) $x^2-2xy-4y-4$

সরল মধ্যপদ বিভক্তিকরণ: $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ সূত্রটি ব্যবহার করে উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। এ পদ্ধতিতে x^2+px+q আকারের বহুপদীর উৎপাদক নির্ণয় করা সম্ভব হয় যদি দুইটি সংখ্যা a ও b নির্ণয় করা যায় যেন, $a+b=p$ এবং $ab=q$ হয়। এজন্য q এর দুইটি সচিহ্ন উৎপাদক নিতে হয় যাদের বীজগাণিতিক সমষ্টি p হয়। $q>0$ হলে, a ও b একই চিহ্নযুক্ত হবে এবং $q<0$ হলে, a ও b বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে। উল্লেখ্য p এবং q পূর্ণসংখ্যা না-ও হতে পারে।

উদাহরণ ২৪. $x^2+12x+35$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $x^2+12x+35=x^2+(5+7)x+5\times 7=(x+5)(x+7)$

উদাহরণ ২৫. x^2+x-20 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $x^2+x-20=x^2+(5-4)x+(5)(-4)=(x+5)(x-4)$

যৌগিক মধ্যপদ বিশ্লেষণ: ax^2+bx+c আকারের বহুপদীর মধ্যপদ বিভক্তিকরণ পদ্ধতিতে $ax^2+bx+c=(rx+p)(sx+q)$ হবে যদি $ax^2+bx+c=rsx^2+(rq+sp)x+pq$ হয়। অর্থাৎ, $a=rs$, $b=rq+sp$ এবং $c=pq$ হয়। সুতরাং, $ac=rspq=(rq)(sp)$ এবং $b=rq+sp$। অতএব, ax^2+bx+c আকারের বহুপদীর উৎপাদক নির্ণয় করতে হলে ac, অর্থাৎ, x^2 এর সহগ এবং x বর্জিত পদের গুণফলকে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে, যাদের বীজগাণিতিক সমষ্টি x এর সহগ b এর সমান হয়।

উদাহরণ ২৬. $3x^2-x-14$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $3x^2-x-14=3x^2-7x+6x-14$

$= x(3x-7)+2(3x-7)=(3x-7)(x+2)$

কাজ: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
ক) x^2+x-56 খ) $16x^3-46x^2+15x$ গ) $12x^2+17x+6$

ঘন আকার: একটি রাশিকে পূর্ণঘন আকারে প্রকাশ করেও উৎপাদক নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ২৭. $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

$= (2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times 3y + 3 \times 2x \times (3y)^2 + (3y)^3$

$= (2x + 3y)^3 = (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$

দুইটি ঘন এর যোগফল বা বিয়োগফলের সূত্র দিয়ে: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ এবং $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ সূত্র দুইটি ব্যবহার করে উৎপাদক নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ২৮. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: ক) $8a^3 + 27b^3$ খ) $a^6 - 64$

সমাধান:

ক) $8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3$

$= (2a + 3b)\{(2a)^2 - 2a \times 3b + (3b)^2\}$

$= (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$

খ) $a^6 - 64 = (a^2)^3 - (4)^3 = (a^2 - 4)\{(a^2)^2 + a^2 \times 4 + (4)^2\}$

$= (a^2 - 4)(a^4 + 4a^2 + 16)$

কিন্তু $a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a+2)(a-2)$

এবং $a^4 + 4a^2 + 16 = (a^2)^2 + (4)^2 + 4a^2$

$= (a^2 + 4)^2 - 2(a^2)(4) + 4a^2$

$= (a^2 + 4)^2 - 4a^2$

$= (a^2 + 4)^2 - (2a)^2$

$= (a^2 + 4 + 2a)(a^2 + 4 - 2a)$

$= (a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4)$

$\therefore a^6 - 64 = (a+2)(a-2)(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4)$

বিকল্প নিয়ম: $a^6 - 64 = (a^3)^2 - 8^2$

$= (a^3 + 8)(a^3 - 8)$

$= (a^3 + 2^3)(a^3 - 2^3)$

$= (a+2)(a^2 - 2a + 4)(a-2)(a^2 + 2a + 4)$

$= (a+2)(a-2)(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4)$

কাজ: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

ক) $2x^4 + 16x$ খ) $8 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$ গ) $(a+b)^3 + (a-b)^3$

ভগ্নাংশসহগযুক্ত রাশির উৎপাদক: ভগ্নাংশসহগযুক্ত রাশির উৎপাদকগুলোকে বিভিন্নভাবে প্রকাশ করা যায়। যেমন, $a^3+\frac{1}{27}=a^3+\frac{1}{3^3}=\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a^2-\frac{a}{3}+\frac{1}{9}\right)$

আবার, $a^3+\frac{1}{27}=\frac{1}{27}(27a^3+1)=\frac{1}{27}\{(3a)^3+(1)^3\}=\frac{1}{27}(3a+1)(9a^2-3a+1)$

দ্বিতীয় সমাধানে চলক-সংবলিত উৎপাদকগুলোর সহগগুলো পূর্ণসংখ্যা কিন্তু সমাধান দুইটি অভিন্ন।

$$\frac{1}{27}(3a+1)(9a^2-3a+1)=\frac{1}{3}(3a+1)\times\frac{1}{9}(9a^2-3a+1)$$
$$=\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a^2-\frac{a}{3}+\frac{1}{9}\right)$$

উদাহরণ ২৯. $x^3+6x^2y+11xy^2+6y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $x^3+6x^2y+11xy^2+6y^3$

$$=\{x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3\}-xy^2-2y^3$$
$$=(x+2y)^3-y^2(x+2y)=(x+2y)\{(x+2y)^2-y^2\}$$
$$=(x+2y)(x+2y+y)(x+2y-y)$$
$$=(x+2y)(x+3y)(x+y)=(x+y)(x+2y)(x+3y)$$

কাজ: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

ক) $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}$ খ) $a^3+\frac{1}{8}$ গ) $16x^2-25y^2-8xz+10yz$

অনুশীলনী ৩.৩

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (১ - ৩০):

১. $ab(x-y)-bc(x-y)$
২. $9x^2+24x+16$
৩. a^4-27a^2+1
৪. $x^4-6x^2y^2+y^4$
৫. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$
৬. $4a^2-12ab+9b^2-4c^2$
৭. $a^2+6a+8-y^2+2y$
৮. $16x^2-25y^2-8xz+10yz$
৯. $x^2+13x+36$
১০. x^4+x^2-20
১১. $a^2-30a+216$
১২. a^8-a^4-2
১৩. $x^2-37x-650$
১৪. $9x^2y^2-5xy^2-14y^2$

১৫. $4x^4 - 27x^2 - 81$

১৬. $ax^2 + (a^2+1)x + a$

১৭. $3(a^2+2a)^2 - 22(a^2+2a) + 40$

১৮. $(a-1)x^2 + a^2xy + (a+1)y^2$

১৯. $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

২০. $a^3 - 6a^2 + 12a - 9$

২১. $a^3 - 9b^3 + (a+b)^3$

২২. $8x^3 + 12x^2 + 6x - 63$

২৩. $8a^3 + \frac{b^3}{27}$

২৪. $\frac{a^6}{27} - b^6$

২৫. $4a^2 + \frac{1}{4a^2} - 2 + 4a - \frac{1}{a}$

২৬. $(3a+1)^3 - (2a-3)^3$

২৭. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 48$

২৮. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) - 65$

২৯. $2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$

৩০. $14(x+z)^2 - 29(x+z)(x+1) - 15(x+1)^2$

৩১. দেখাও যে, $(x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4) = (3x^2+2x-1)(3x^2+2x-8)$

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem)

নিচের উদাহরণটিতে $6x^2 - 7x + 5$ কে $x - 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল ও ভাগশেষ কত?

$$
\begin{array}{r|rrr|l}
x-1) & 6x^2 & -7x & +5 & (6x-1 \\
 & 6x^2 & -6x & & \\
\hline
 & & -x & +5 & \\
 & & -x & +1 & \\
\hline
 & & & 4 &
\end{array}
$$

এখানে, ভাজক $x-1$, ভাজ্য $6x^2 - 7x + 5$, ভাগফল $6x - 1$ এবং ভাগশেষ 4।

আমরা জানি, ভাজ্য = ভাজক $\times$ ভাগফল $+$ ভাগশেষ

এখন যদি আমরা ভাজ্যকে $f(x)$, ভাগফলকে $h(x)$, ভাগশেষকে r ও ভাজককে $(x-a)$ দ্বারা সূচিত করি, তাহলে উপরের সূত্র থেকে পাই,

$f(x) = (x-a)\cdot h(x) + r$, এই সূত্রটি a এর সকল মানের জন্য সত্য।

উভয়পক্ষে $x = a$ বসিয়ে পাই,

$f(a) = (a-a)\cdot h(a) + r = 0 \cdot h(a) + r = r$

সুতরাং, $r = f(a)$

অতএব, $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$। এই সূত্র ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder theorem) নামে পরিচিত। অর্থাৎ, ধনাত্মক মাত্রার কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $(x-a)$

আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হলো ভাগশেষ উপপাদ্য। উপরের উদাহরণে $a = 1$ হলে $f(x) = 6x^2 - 7x + 5$।

$\therefore$ $f(1) = 6 - 7 + 5 = 4$ যা ভাগশেষের সমান। ভাজক বহুপদী $(x - a)$ এর মাত্রা 1, ভাজক যদি ভাজ্যের উৎপাদক হয়, তাহলে ভাগশেষ হবে শূন্য। আর যদি উৎপাদক না হয়, তাহলে ভাগশেষ থাকবে এবং তা হবে অশূন্য কোনো সংখ্যা। তবে সাধারণভাবে বলতে গেলে ভাগফল ভাজকের থেকে কম মাত্রার একটি বহুপদী হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ১১. $(x - a)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়।

প্রমাণ: ধরি, $f(a) = 0$। অতএব, ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, $f(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হবে। অর্থাৎ, $(x - a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।

বিপরীতক্রমে, ধরি, $(x - a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

অতএব, $f(x) = (x - a) \cdot h(x)$, যেখানে $h(x)$ বহুপদী।

উভয়পক্ষে $x = a$ বসিয়ে পাই,

$$f(a) = (a - a) \cdot h(a) = 0$$

$$\therefore f(a) = 0$$

সুতরাং, কোনো বহুপদী $f(x)$, $(x - a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়। এই সূত্র উৎপাদক উপপাদ্য (Factor theorem) নামে পরিচিত। □

প্রতিজ্ঞা ১২. যদি $f(x)$ এর মাত্রা ধনাত্মক হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $f(x)$ কে $(ax + b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f\left(-\frac{b}{a}\right)$।

প্রমাণ: ভাজক $ax + b$, $(a \neq 0)$ এর মাত্রা 1।

সুতরাং আমরা লিখতে পারি, $f(x) = (ax + b) \cdot h(x) + r = a\left(x + \frac{b}{a}\right) \cdot h(x) + r$

$$\therefore f(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \cdot a \cdot h(x) + r$$

দেখা যাচ্ছে যে, $f(x)$ কে $\left(x + \frac{b}{a}\right)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয়, $a \cdot h(x)$ এবং ভাগশেষ হয় r।

এখানে, ভাজক $= x - \left(-\frac{b}{a}\right)$

সুতরাং ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, $r = f\left(-\frac{b}{a}\right)$

অতএব, $f(x)$ কে $(ax + b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $\left(-\frac{b}{a}\right)$। □

অনুসিদ্ধান্ত ১৩. $ax+b, a \neq 0$ হলে, রাশিটি কোনো বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ হয়।

প্রমাণ: $a \neq 0, ax+b = a\left(x+\frac{b}{a}\right)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $\left(x+\frac{b}{a}\right)$ $= x-\left(-\frac{b}{a}\right)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়। অর্থাৎ, যদি এবং কেবল যদি $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ হয়। ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয়ের এই পদ্ধতিকে **শূন্যায়ন পদ্ধতি** (Vanishing method) বলে।

উদাহরণ ৩০. x^3-x-6 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: এখানে, $f(x)=x^3-x-6$ একটি বহুপদী। এর ধ্রুবপদ -6 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$।

এখন, $x=1,-1$ বসিয়ে দেখি, $f(x)$ এর মান শূন্য হয় না।

কিন্তু $x=2$ বসিয়ে দেখি, $f(x)$ এর মান শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $f(2)=2^3-2-6=8-2-6=0$।

সুতরাং, $x-2$, $f(x)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= x^3-x-6\\ &= x^3-2x^2+2x^2-4x+3x-6\\ &= x^2(x-2)+2x(x-2)+3(x-2)\\ &= (x-2)(x^2+2x+3)\end{aligned}$$

উদাহরণ ৩১. $x^3-3xy^2+2y^3$ এবং $x^2+xy-2y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: এখানে, x কে চলক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করি।

প্রদত্ত রাশিকে x-এর বহুপদী বিবেচনা করে

ধরি, $f(x)=x^3-3xy^2+2y^3$

তাহলে, $f(y)=y^3-3y\cdot y^2+2y^3=3y^3-3y^3=0$

$\therefore (x-y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3-3xy^2+2y^3$

$$\begin{aligned}&= x^3-x^2y+x^2y-xy^2-2xy^2+2y^3\\ &= x^2(x-y)+xy(x-y)-2y^2(x-y)=(x-y)(x^2+xy-2y^2)\end{aligned}$$

আবার ধরি, $g(x)=x^2+xy-2y^2$

$\therefore g(y) = y^2 + y^2 - 2y^2 = 0$

$\therefore (x - y), g(x)$ এর একটি উৎপাদক

$$\begin{aligned}\therefore g(x) &= x^2 + xy - 2y^2 \\ &= x^2 - xy + 2xy - 2y^2 \\ &= x(x-y) + 2y(x-y) \\ &= (x-y)(x+2y)\end{aligned}$$

$\therefore x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = (x-y)^2(x+2y)$

উদাহরণ ৩২. $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: ধরি, $f(x) = 54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

তাহলে, $f\left(-\frac{1}{2}a\right) = 54\left(-\frac{1}{2}a\right)^4 + 27a\left(-\frac{1}{2}a\right)^3 - 16\left(-\frac{1}{2}a\right) - 8a$

$$= \frac{27}{8}a^4 - \frac{27}{8}a^4 + 8a - 8a = 0$$

$\therefore x - \left(-\frac{1}{2}a\right) = x + \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(2x+a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

অর্থাৎ, $(2x+a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

$$\begin{aligned}&= 27x^3(2x+a) - 8(2x+a) \\ &= (2x+a)(27x^3 - 8) \\ &= (2x+a)\{(3x)^3 - (2)^3\} \\ &= (2x+a)(3x-2)(9x^2+6x+4)\end{aligned}$$

উদাহরণ ৩৩. $g(a) = a^3 + a^2 + 10a - 8$, $f(a) = a^3 - 9 + (a+1)^3$।

ক) $g(a)$ কে $(a-2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা নির্ণয় কর।

খ) $f(a)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: ক) দেওয়া আছে, $g(a) = a^3 + a^2 + 10a - 8$

ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $g(a)$ কে $(a-2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $g(2)$।

$\therefore g(2) = 2^3 + 2^2 + 10\cdot 2 - 8 = 8 + 4 + 20 - 8 = 32 - 8 = 24$

$\therefore g(2) = 24$

নির্ণেয় ভাগশেষ 24

খ) $f(a) = a^3 - 9 + (a+1)^3$

$f(a)$ একটি বহুপদী, $a = 1$ বসালে বহুপদীটির মান শূন্য হয়।

ফলে $(a-1)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned} \therefore\ f(a) &= a^3 - 9 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 2a^3 + 3a^2 + 3a - 8 \\ &= 2a^3 - 2a^2 + 5a^2 - 5a + 8a - 8 \\ &= 2a^2(a-1) + 5a(a-1) + 8(a-1) \\ &= (a-1)(2a^2 + 5a + 8) \end{aligned}$$

$$\therefore\ a^3 - 9 + (a+1)^3 = (a-1)(2a^2 + 5a + 8)$$

কাজ: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
ক) $x^3 - 21x - 20$ খ) $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ গ) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

অনুশীলনী ৩.৪

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

১. $3a^3 + 2a + 5$

২. $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

৩. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

৪. $x^3 + 4x^2 + x - 6$

৫. $a^3 + 3a + 36$

৬. $a^4 - 4a + 3$

৭. $a^3 - a^2 - 10a - 8$

৮. $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

৯. $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

১০. $x^3 - x - 24$

১১. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

১২. $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

১৩. $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

১৪. $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

১৫. $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

১৬. $18x^3 + 15x^2 - x - 2$

বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন ও প্রয়োগ

দৈনন্দিন কাজে বিভিন্ন সময়ে আমরা বাস্তব সমস্যার সম্মুখীন হই। এই সমস্যাগুলো ভাষাগতভাবে বর্ণিত হয়। এ অনুচ্ছেদে আমরা ভাষাগতভাবে বর্ণিত বাস্তব পরিবেশের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানকল্পে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন এবং তা প্রয়োগ করার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব। এই আলোচনার ফলে শিক্ষার্থীরা একদিকে যেমন বাস্তব পরিবেশে গণিতের প্রয়োগ সম্পর্কে ধারণা পাবে, অন্যদিকে নিজেদের পারিপার্শ্বিক অবস্থায় গণিতের সম্পৃক্ততা বুঝতে পেরে গণিত শিক্ষার প্রতি আগ্রহী হবে।

সমস্যা সমাধানের পদ্ধতি:

১. প্রথমেই সতর্কতার সাথে সমস্যাটি পর্যবেক্ষণ করে এবং মনোযোগ সহকারে পড়ে কোনগুলো অজ্ঞাত এবং কী নির্ণয় করতে হবে তা চিহ্নিত করতে হবে।

২. অজ্ঞাত রাশিগুলোর একটিকে যেকোনো চলক (ধরি x) দ্বারা সূচিত করতে হবে। অতঃপর সমস্যাটি ভালোভাবে অনুধাবন করে সম্ভব হলে অন্যান্য অজ্ঞাত রাশিগুলোকেও একই চলক x এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।

৩. সমস্যাকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করে বীজগাণিতিক রাশি দ্বারা প্রকাশ করতে হবে।

৪. প্রদত্ত শর্ত ব্যবহার করে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশগুলোকে একত্রে একটি সমীকরণে প্রকাশ করতে হবে।

৫. সমীকরণটি সমাধান করে অজ্ঞাত রাশি x এর মান নির্ণয় করতে হবে।

বাস্তব সমস্যা সমাধানে বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার করা হয়। সূত্রগুলো এখানে আলোচনা করা হলো।

দেয় বা প্রাপ্য বিষয়ক

মনে করি, $q =$ জনপ্রতি দেয় বা প্রাপ্য টাকার পরিমাণ

$n =$ লোকের সংখ্যা

$\therefore$ দেয় বা প্রাপ্য টাকার পরিমাণ, $A = qn$

সময় ও কাজ বিষয়ক

মনে করি, $q =$ প্রত্যেকে একক সময়ে কাজের যে অংশ সম্পন্ন করে

$n =$ কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা

$x =$ কাজের মোট সময়

$W = n$ জনে x সময়ে কাজের যে অংশ সম্পন্ন করে

$\therefore W = qnx$

সময় ও দূরত্ব বিষয়ক

মনে করি, $v =$ প্রতি ঘণ্টায় গতিবেগ

$t =$ মোট সময়

$d =$ মোট দূরত্ব

$\therefore d = vt$

নল ও চৌবাচ্চা বিষয়ক

মনে করি, $Q_0 =$ নলের মুখ খুলে দেওয়ার সময় চৌবাচ্চায় জমা পানির পরিমাণ

$q =$ প্রতি একক সময়ে নল দিয়ে যে পানি প্রবেশ করে অথবা বের হয়

$t =$ অতিক্রান্ত সময়

$Q(t) = t$ সময়ে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ

$\therefore\ Q(t) = Q_0 \pm qt$

পানি প্রবেশ হওয়ার শর্তে '$+$' চিহ্ন এবং পানি বের হওয়ার শর্তে '$-$' চিহ্ন ব্যবহার করতে হবে।

শতকরা অংশ বিষয়ক

মনে করি, $b =$ মোট রাশি

$r =$ শতকরা হার $= \frac{s}{100} = s\%$

$p =$ শতকরা অংশ $= b$ এর $s\%$

$\therefore\ p = br$

লাভ-ক্ষতি বিষয়ক

মনে করি, $C =$ ক্রয়মূল্য

$r =$ লাভ বা ক্ষতির শতকরা হার

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য $S = C(1 \pm r)$

লাভের ক্ষেত্রে, $S = C(1 + r)$ এবং ক্ষতির ক্ষেত্রে, $S = C(1 - r)$

বিনিয়োগ-মুনাফা বিষয়ক

মনে করি, $I = n$ একক সময় পরে মুনাফা

$n =$ নির্দিষ্ট সংখ্যক একক সময়

$P =$ মূলধনের পরিমাণ

$r =$ একক সময়ে একক মূলধনের মুনাফা

$A = n$ একক সময় পরে মুনাফাসহ মূলধন

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

$$I = Pnr$$

$$A = P + I = P + Pnr = P(1 + nr)$$

চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে, $C = P(1 + r)^n$

উদাহরণ ৩৪. বার্ষিক ক্রীড়া অনুষ্ঠান করার জন্য কোনো এক সমিতির সদস্যরা $45,000$ টাকার বাজেট করলেন এবং সিদ্ধান্ত নিলেন যে, প্রত্যেক সদস্যই সমান চাঁদা দিবেন। কিন্তু 5 জন সদস্য চাঁদা দিতে অসম্মতি জানালেন। এর ফলে প্রত্যেক সদস্যের মাথাপিছু 15 টাকা চাঁদা বৃদ্ধি পেল। ঐ সমিতিতে কতজন সদস্য ছিলেন?

সমাধান: মনে করি, সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং জনপ্রতি দেয় চাঁদার পরিমাণ q টাকা। তাহলে, মোট চাঁদা, $A = qx = 45,000$ টাকা।

প্রকৃতপক্ষে চাঁদা প্রদানকারী সদস্য সংখ্যা ছিল $(x-5)$ জন এবং জনপ্রতি চাঁদা $(q+15)$ টাকা।

তাহলে, মোট চাঁদা হলো $(x-5)(q+15)$

প্রশ্নানুসারে,

$$qx = (x-5)(q+15) \cdots\cdots (1)$$

$$qx = 45000 \cdots\cdots (2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই,

$qx = (x-5)(q+15)$

বা, $qx = qx - 5q + 15x - 75$

বা, $5q = 15x - 75 = 5(3x - 15)$

$\therefore q = 3x - 15$

সমীকরণ (2) এ q এর মান বসিয়ে পাই,

$(3x - 15) \times x = 45000$

বা, $3x^2 - 15x = 45000$

বা, $x^2 - 5x = 15000$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 - 5x - 15000 = 0$

বা, $x^2 - 125x + 120x - 15000 = 0$

বা, $x(x - 125) + 120(x - 125) = 0$

বা, $(x - 125)(x + 120) = 0$

সুতরাং, $(x - 125) = 0$ অথবা $(x + 120) = 0$

বা, $x = 125$ বা, $x = -120$

যেহেতু সদস্য সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই x এর মান -120 গ্রহণযোগ্য নয়।

সুতরাং, সমিতির সদস্য সংখ্যা 125

উদাহরণ ৩৫. রফিক একটি কাজ 10 দিনে করতে পারে। শফিক ঐ কাজ 15 দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে?

সমাধান: মনে করি, তারা একত্রে d দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

নাম	কাজ সম্পন্ন করার দিন	১ দিনে কাজের সম্পন্ন অংশ	d দিনে কাজের সম্পন্ন অংশ
রফিক	10	$\frac{1}{10}$	$\frac{d}{10}$
শফিক	15	$\frac{1}{15}$	$\frac{d}{15}$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{d}{10}+\frac{d}{15}=1$ বা, $d\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)=1$

বা, $d\left(\frac{3+2}{30}\right)=1$ বা, $\frac{5d}{30}=1$

বা, $d=\frac{30}{5}=6$

সুতরাং, তারা একত্রে 6 দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

উদাহরণ ৩৬. একজন মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে t_1 ঘণ্টায় x কি.মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে তার t_2 ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত?

সমাধান: ধরি, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় v কি.মি. এবং স্থির পানিতে নৌকার বেগ ঘণ্টায় u কি.মি.। তাহলে, স্রোতের অনুকূলে নৌকার কার্যকরী বেগ ঘণ্টায় $(u+v)$ কি.মি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার কার্যকরী বেগ ঘণ্টায় $(u-v)$ কি.মি.।

আমরা জানি, বেগ $=\frac{\text{অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{সময়}}$

প্রশ্নানুসারে, $u+v=\frac{x}{t_2}\cdots\cdots(1)$

এবং $u-v=\frac{x}{t_1}\cdots\cdots(2)$

সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

$2u=\frac{x}{t_2}+\frac{x}{t_1}=x\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$ বা, $u=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$

সমীকরণ (1) ও (2) বিয়োগ করে পাই,

$2v=\frac{x}{t_2}-\frac{x}{t_1}=x\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$ বা, $v=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$

সুতরাং, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$ কি.মি. এবং নৌকার বেগ ঘণ্টায় $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$ কি.মি.।

উদাহরণ ৩৭. একটি নল 12 মিনিটে একটি খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ করতে পারে। অপর একটি নল প্রতি মিনিটে 14 লিটার পানি বের করে দেয়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসাথে খুলে দেওয়া হলে চৌবাচ্চাটি 96 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার পানি ধরে?

সমাধান: মনে করি, প্রথম নল দ্বারা প্রতি মিনিটে x লিটার পানি প্রবেশ করে এবং চৌবাচ্চাটিতে মোট y লিটার পানি ধরে।

প্রশ্নানুসারে, প্রথম নল দ্বারা 12 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়

$\therefore y = 12x \cdots\cdots (1)$

আবার, দুইটি নল দ্বারা 96 মিনিটে খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়

$\therefore y = 96x - 96 \times 14 \cdots\cdots (2)$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $x = \dfrac{y}{12}$

x এর মান সমীকরণ (2) এ বসিয়ে পাই,

$y = 96 \times \dfrac{y}{12} - 96 \times 14$

বা, $y = 8y - 96 \times 14$

বা, $7y = 96 \times 14$

বা, $y = \dfrac{96 \times 14}{7} = 192$

সুতরাং, চৌবাচ্চাটিতে মোট 192 লিটার পানি ধরে।

কাজ:

ক) বনভোজনে যাওয়ার জন্য একটি বাস 2400 টাকায় ভাড়া করা হলো এবং সিদ্ধান্ত গৃহীত হলো যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া দিবে। 10 জন যাত্রী অনুপস্থিত থাকায় মাথাপিছু ভাড়া 8 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কতজন যাত্রী গিয়েছিল এবং প্রত্যেকে কত টাকা করে ভাড়া দিয়েছিল?

খ) ক ও খ একত্রে একটি কাজ p দিনে করতে পারে। ক একা কাজটি q দিনে করতে পারে। খ একাকী কত দিনে ঐ কাজটি করতে পারবে?

গ) এক ব্যক্তি স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় বেয়ে ঘণ্টায় 2 কি.মি. বেগে যেতে পারে। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 কি.মি. হলে, স্রোতের অনুকূলে 32 কি.মি. যেতে তার কত সময় লাগবে?

উদাহরণ ৩৮. একটি বইয়ের মূল্য 24 টাকা। এই মূল্য বই তৈরির ব্যয়ের 80%। বাকি মূল্য সরকার ভর্তুকি দিয়ে থাকেন। সরকার প্রতি বইয়ে কত টাকা ভর্তুকি দেন?

সমাধান: বাজার মূল্য = বই তৈরির ব্যয়ের 80%

আমরা জানি, $p = br$

এখানে, $p = 24$ টাকা এবং $r = 80\% = \frac{80}{100}$

$\therefore 24 = b \times \frac{80}{100}$

বা, $b = \frac{24 \times 100}{80}$

$\therefore b = 30$ টাকা

সুতরাং বই তৈরির ব্যয় 30 টাকা।

$\therefore$ ভর্তুকি $= (30 - 24)$ টাকা $= 6$ টাকা

সুতরাং সরকার প্রতি বইয়ে 6 টাকা ভর্তুকি দেন।

উদাহরণ ৩৯. টাকায় n সংখ্যক কমলা বিক্রয় করায় $r\%$ ক্ষতি হয়। $s\%$ লাভ করতে হলে, টাকায় কয়টি কমলা বিক্রয় করতে হবে?

সমাধান: ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে, $r\%$ ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $(100 - r)$ টাকা।

তাহলে, যখন বিক্রয়মূল্য $(100 - r)$ টাকা, তখন ক্রয়মূল্য 100 টাকা।

$\therefore$ যখন বিক্রয়মূল্য 1 টাকা, তখন ক্রয়মূল্য $\frac{100}{100 - r}$ টাকা।

আবার, ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে, $s\%$ লাভে বিক্রয়মূল্য $(100 + s)$ টাকা।

$\therefore$ ক্রয়মূল্য $\frac{100}{100 - r}$ টাকা হলে, $s\%$ লাভে বিক্রয়মূল্য $\left(\frac{100 + s}{100} \times \frac{100}{100 - r}\right)$ টাকা

$= \frac{100 + s}{100 - r}$ টাকা।

সুতরাং, $\frac{100 + s}{100 - r}$ টাকায় বিক্রয় করতে হবে n সংখ্যক কমলা

$\therefore 1$ টাকায় বিক্রয় করতে হবে $n \times \left(\frac{100 - r}{100 + s}\right)$ সংখ্যক কমলা

সুতরাং, টাকায় $\frac{n(100 - r)}{100 + s}$ সংখ্যক কমলা বিক্রয় করতে হবে।

উদাহরণ ৪০. শতকরা বার্ষিক 7 টাকা হার সরল মুনাফায় 650 টাকার 6 বছরের মুনাফা কত?

সমাধান: আমরা জানি, $I = Pnr$

এখানে, $P = 650$ টাকা, $n = 6$ বছর, শতকরা মুনাফার হার $s = 7$ টাকা

$\therefore r = \frac{s}{100} = \frac{7}{100}$

$\therefore I = 650 \times 6 \times \frac{7}{100} = 273$

সুতরাং, মুনাফা 273 টাকা।

উদাহরণ ৪১. বার্ষিক শতকরা 6 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 15000 টাকার 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, $C = P(1+r)^n$ [যেখানে C চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সবৃদ্ধিমূল]

দেওয়া আছে, $P = 15000$ টাকা, $r = 6\% = \frac{6}{100}$, $n = 3$ বছর

$$\therefore C = 15000\left(1+\frac{6}{100}\right)^3 = 15000\left(1+\frac{3}{50}\right)^3 = 15000\left(\frac{53}{50}\right)^3$$

$$= 15000 \times \frac{53}{50} \times \frac{53}{50} \times \frac{53}{50} = \frac{446631}{25} = 17865.24$$

$\therefore$ সবৃদ্ধিমূল $= 17865.24$ টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $= (17865.24 - 15000)$ টাকা $= 2865.24$ টাকা।

কাজ:

ক) 50 টাকায় 10টি লেবু বিক্রয় করায় 50% ক্ষতি হয়। 50 টাকায় 6টি লেবু বিক্রয় করলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে?

খ) বার্ষিক শতকরা $6\frac{1}{2}$ হার সরল মুনাফায় 750 টাকার 4 বছরের সবৃদ্ধিমূল কত টাকা হবে?

গ) বার্ষিক 4 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 2000 টাকার 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৪২. টাকায় 10টি আইসক্রিম এর কাঠি বিক্রয় করলে x% ক্ষতি হয়। টাকায় কয়টি বিক্রয় করলে z% লাভ হবে?

সমাধান: ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে x% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $= (100 - x)$

বিক্রয়মূল্য $(100 - x)$ টাকা হলে ক্রয়মূল্য 100 টাকা

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে ক্রয়মূল্য $\frac{100}{100 - x}$ টাকা

অর্থাৎ 10টি আইসক্রিম কাঠির ক্রয়মূল্য $\frac{100}{100 - x}$ টাকা

$\therefore$ 1টি আইসক্রিম কাঠির ক্রয়মূল্য $\frac{100}{(100 - x) \times 10}$ টাকা

আবার ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে $z\%$ লাভে বিক্রয়মূল্য $(100+z)$ টাকা

ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $(100+z)$ টাকা

ক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $\dfrac{100+z}{100}$ টাকা

$\therefore$ ক্রয়মূল্য $\dfrac{100}{(100-x)\times 10}$ টাকা হলে

$$\text{বিক্রয়মূল্য } \frac{100+z}{100}\times\frac{100}{(100-x)\times 10} \text{ টাকা} = \frac{(100+z)}{(100-x)\times 10}$$

1টি আইসক্রিম কাঠির বিক্রয়মূল্য $\dfrac{(100+z)}{(100-x)\times 10} = \dfrac{100+z}{1000-10x}$ টাকা

অর্থাৎ টাকায় $\dfrac{1000-10x}{100+z}$ টি আইসক্রিম কাঠি বিক্রয় করতে হবে।

অনুশীলনী ৩.৫

১. $f(x)=x^2-4x+4$ হলে, $f(2)$ এর মান নিচের কোনটি?
   ক) 4 খ) 2 গ) 1 ঘ) 0

২. $\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$ এর মান নিচের কোনটি?
   ক) $2(a^2+b^2)$ খ) a^2+b^2 গ) $2ab$ ঘ) $4ab$

৩. $x+\frac{2}{x}=3$ হলে, $x^3+\frac{8}{x^3}$ এর মান কত?
   ক) 1 খ) 8 গ) 9 ঘ) 16

৪. p^4+p^2+1 এর উৎপাদকে বিশ্লেষায়িত রূপ নিচের কোনটি?
   ক) $(p^2-p+1)(p^2+p-1)$ খ) $(p^2-p-1)(p^2+p+1)$
   গ) $(p^2+p+1)(p^2+p+1)$ ঘ) $(p^2+p+1)(p^2-p+1)$

৫. যদি $x=2-\sqrt{3}$ হয়, x^2 তবে এর মান কত?
   ক) 1 খ) $7-4\sqrt{3}$ গ) $2+\sqrt{3}$ ঘ) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

৬. $f(x)=x^2-5x+6$ এবং $f(x)=0$ হলে, $x=$ কত?
   ক) $2,3$ খ) $-5,1$ গ) $-2,3$ ঘ) $1,-5$

৭. $9x^2+16y^2$ এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ রাশি হবে?
   ক) $6xy$ খ) $12xy$ গ) $24xy$ ঘ) $144xy$

$x^4-x^2+1=0$ হলে, নিচের ৮- ১০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৮. $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

ক) 4 খ) 2 গ) 1 ঘ) 0

৯. $(x + \frac{1}{x})^2$ এর মান কত?

ক) 4 খ) 3 গ) 2 ঘ) 0

১০. $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান কত?

ক) 3 খ) 2 গ) 1 ঘ) 0

১১. $a^2 + b^2 = 9$ এবং $ab = 3$ হলে

(i) $(a-b)^2 = 3$ (ii) $(a+b)^2 = 15$ (iii) $a^2 + b^2 + a^2b^2 = 18$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

১২. $3a^5 - 6a^4 + 3a + 14$ একটি বীজগাণিতিক রাশি হলে-

(i) রাশিটির চলক a (ii) রাশিটির মাত্রা 5 (iii) a^4 এর সহগ 6

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

১৩. $p^3 - \frac{1}{64}$ এর উৎপাদক–

(i) $p - \frac{1}{4}$ (ii) $p^2 + \frac{p}{4} + \frac{1}{8}$ (iii) $p^2 + \frac{p}{4} + \frac{1}{16}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

১৪. ক একটি কাজ p দিনে করে এবং খ, $2p$ দিনে করে। তারা একটি কাজ আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে গেল। বাকি কাজটুকু খ r দিনে শেষ করে। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল?

১৫. দৈনিক 6 ঘণ্টা পরিশ্রম করে 10 জন লোক একটি কাজ 7 দিনে করতে পারে। দৈনিক কত ঘণ্টা পরিশ্রম করে 14 জনে 6 দিনে ঐ কাজটি করতে পারবে?

১৬. মিতা একটি কাজ 10 দিনে করতে পারে। রিতা সে কাজ 15 দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে?

১৭. বনভোজনে যাওয়ার জন্য 5700 টাকায় একটি বাস ভাড়া করা হলো এবং শর্ত হলো যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 5 জন যাত্রী না যাওয়ায় মাথাপিছু ভাড়া 3 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কতজন যাত্রী গিয়েছিল?

১৮. একজন মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে p ঘণ্টায় d কি.মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে তার q ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত?

১৯. একজন মাঝির দাঁড় বেয়ে 15 কি.মি. যেতে এবং সেখান থেকে ফিরে আসতে 4 ঘণ্টা সময় লাগে। সে স্রোতের অনুকূলে যতক্ষণে 5 কি.মি. যায়, স্রোতের প্রতিকূলে ততক্ষণে 3 কি.মি. যায়। দাঁড়ের বেগ ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

২০. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে। প্রথম নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি t_1 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং দ্বিতীয় নল দ্বারা t_2 মিনিটে খালি হয়। নল দুইটি একত্রে খুলে দিলে খালি চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হবে? (এখানে $t_2>t_1$)

২১. একটি নল দ্বারা 12 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়। অপর একটি নল দ্বারা 1 মিনিটে তা থেকে 15 লিটার পানি বের করে দেয়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দেওয়া হয় এবং চৌবাচ্চাটি 48 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার পানি ধরে?

২২. ক, খ ও গ এর মধ্যে 260 টাকা এরূপে ভাগ করে দাও যেন ক এর অংশের 2 গুণ, খ এর অংশের 3 গুণ এবং গ এর অংশের 4 গুণ পরস্পর সমান হয়।

২৩. একটি দ্রব্য $x\%$ ক্ষতিতে বিক্রয় করলে যে মূল্য পাওয়া যায়, $3x\%$ লাভে বিক্রয় করলে তার চেয়ে $18x$ টাকা বেশি পাওয়া যায়। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ছিল?

২৪. একটি কলম 11 টাকায় বিক্রয় করলে 10% লাভ হয়। কলমটির ক্রয়মূল্য কত?

২৫. একটি খাতা 36 টাকায় বিক্রয় করায় যত ক্ষতি হলো, 72 টাকায় বিক্রয় করলে তার দ্বিগুণ লাভ হতো, খাতাটির ক্রয়মূল্য কত?

২৬. মুনাফার একই হারে 300 টাকার 4 বছরের সরল মুনাফা ও 400 টাকার 5 বছরের সরল মুনাফা একত্রে 128 টাকা হলে, শতকরা মুনাফার হার কত?

২৭. 4% হার মুনাফায় কোনো টাকার 2 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য 1 টাকা হলে, মূলধন কত?

২৮. কোনো আসল 3 বছরে সরল মুনাফাসহ 460 টাকা এবং 5 বছরে সরল মুনাফাসহ 600 টাকা হলে, শতকরা মুনাফার হার কত?

২৯. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সরল মুনাফায় কত টাকা 13 বছরে সবৃদ্ধিমূল 990 টাকা হবে?

৩০. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার মুনাফায় কত টাকা 12 বছরে সবৃদ্ধিমূল 1280 টাকা হবে?

৩১. 5% হার মুনাফায় 8000 টাকার 3 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

৩২. মিষ্টির উপর মূল্য সংযোজন কর (VAT) $x\%$। একজন বিক্রেতা ভ্যাটসহ P টাকার মিষ্টি বিক্রয় করলে তাকে কত ভ্যাট দিতে হবে? $x=15$, $P=2300$ হলে, ভ্যাটের পরিমাণ কত?

৩৩. কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 3।

ক) সংখ্যাটিকে x চলকে প্রকাশ করে উপরের তথ্যকে সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$

৩৪. কোনো সমিতির সদস্যগণ প্রত্যেকেই সদস্য সংখ্যার 100 গুণ চাঁদা দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। কিন্তু 4 জন সদস্য চাঁদা না দেওয়ায় প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ পূর্বের চেয়ে 500 টাকা বেড়ে গেল।

ক) সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং মোট চাঁদার পরিমাণ A হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ) সমিতির সদস্য সংখ্যা ও মোট চাঁদার পরিমাণ নির্ণয় কর।

গ) মোট চাঁদার $\frac{1}{4}$ অংশ 5% হারে এবং অবশিষ্ট টাকা 4% হারে 2 বছরের জন্য সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করা হলো। মোট মুনাফা নির্ণয় কর।

৩৫. বনভোজনে যাওয়ার জন্য একটি বাস 2400 টাকায় ভাড়া করা হলো এবং শর্ত হলো প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 10 জন যাত্রী না আসায় মাথাপিছু ভাড়া 8 (আট) টাকা বৃদ্ধি পেল।

ক) মাথাপিছু বর্ধিত ভাড়ার পরিমান, না আসা যাত্রী সংখ্যার শতকরা কত তা নির্ণয় কর।

খ) বাসে যাওয়া যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া নির্ণয় কর।

গ) বাস ভাড়ার সমপরিমাণ টাকার 5% হার মুনাফায় 13 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

৩৬. দাঁড় বেয়ে একটি খালের A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে যেয়ে ফিরে আসতে হবে। দাঁড়ের বেগ ধ্রুব হলে স্রোত থাকলে সময় বেশি লাগবে না স্রোত না থাকলে সময় বেশি লাগবে?

৩৭. একটি মাঠে ধ্রুব হারে ঘাস বৃদ্ধি পায়। 17টি গরু 30 দিনে সব ঘাস খেয়ে ফেলতে পারে। তবে 19টি গরুর লাগে 24 দিন। একদল গরু 6 দিন ঘাস খাওয়ার পর 4টি গরু বিক্রয় করা হলে ঘাস খাওয়া শেষ করতে আরও 2 দিন লাগলো। দলটিতে শুরুতে কতগুলো গরু ছিল?

৩৮. দুই ভাইয়ের একটি প্রশিক্ষিত ঘোড়া ছিল যা যেকোনো নির্দেশই পালন করতে পারে। দুই ভাই একই সময়ে বাসা থেকে রওয়ানা হয়ে 20 মাইল দূরে একটি বৈশাখী মেলায় যেতে চায়। ঘোড়া যেকোনো মুহূর্তে মাত্র একজন ভাইকে বহন করতে পারে। ভাইদের বেগ ঘণ্টায় 4 মাইল এবং ঘোড়ার বেগ ঘণ্টায় (মানুষসহ কিংবা ছাড়া) 10 মাইল হলে সর্বনিম্ন কত সময়ে তারা মেলায় পৌঁছতে পারবে? প্রত্যেক ভাই কতটা পথ হাঁটবে?

অধ্যায় ৪

সূচক ও লগারিদম (Exponents and Logarithms)

অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যা বা রাশিকে সূচকের সাহায্যে লিখে অতি সহজে প্রকাশ করা যায়। ফলে হিসাব গণনা ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান সহজতর হয়। তাছাড়া সূচকের মাধ্যমেই সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ প্রকাশ করা হয়। তাই প্রত্যেক শিক্ষার্থীর সূচকের ধারণা ও এর প্রয়োগ সম্পর্কে জ্ঞান থাকা আবশ্যক।

সূচক থেকেই লগারিদমের সৃষ্টি। লগারিদমের সাহায্যে সংখ্যার বা রাশির গুণ, ভাগ ও সূচক সম্পর্কিত গণনার কাজ সহজ হয়েছে। ক্যালকুলেটর ও কম্পিউটারের ব্যবহার প্রচলনের পূর্ব পর্যন্ত বৈজ্ঞানিক হিসাব ও গণনায় লগারিদমের ব্যবহার ছিল একমাত্র উপায়। এখনও এগুলোর বিকল্প হিসাবে লগারিদমের ব্যবহার গুরুত্বপূর্ণ।

এ অধ্যায়ে সূচক ও লগারিদম সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- ▶ মূলদ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ ধনাত্মক পূর্ণ-সাংখ্যিক সূচক, শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণ-সাংখ্যিক সূচক ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ▶ সূচকের নিয়মাবলি বর্ণনা ও তা প্রয়োগ করে সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- ▶ n তম মূল ও মূলদ ভগ্নাংশ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং n তম মূলকে সূচক আকারে প্রকাশ করতে পারবে।
- ▶ লগারিদম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ লগারিদমের সূত্রাবলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ▶ সাধারণ লগারিদম ও স্বাভাবিক লগারিদম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সাধারণ ও স্বাভাবিক লগারিদম নির্ণয় করতে পারবে।

সূচক (Exponents or Indices)

আমরা দাখিল ষষ্ঠ শ্রেণিতে সূচকের ধারণা পেয়েছি এবং দাখিল সপ্তম শ্রেণিতে গুণের ও ভাগের সূচক নিয়ম সম্পর্কে জেনেছি। সূচক ও ভিত্তি সংবলিত রাশিকে **সূচকীয় রাশি** বলা হয়।

কাজ: নিচের সারণিতে খালি ঘরগুলো পূরণ কর।

একই সংখ্যা বা রাশির ক্রমিক গুণ	সূচকীয় রাশি	ভিত্তি	ঘাত বা সূচক
$2 \times 2 \times 2$	2^3	2	3
$3 \times 3 \times 3 \times 3$		3	
$a \times a \times a$	a^3		
$b \times b \times b \times b \times b$			5

a যেকোনো বাস্তব সংখ্যা এবং n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, n সংখ্যক a এর ক্রমিক গুণ হলো a^n। অর্থাৎ, $a \times a \times a \times \ldots \times a$ (n সংখ্যক বার a) $= a^n$। এখানে, n হলো **সূচক বা ঘাত** এবং a হলো **ভিত্তি**। আবার, বিপরীতক্রমে $a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$ (n সংখ্যক বার a)।

সূচক শুধু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাই নয়, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ধনাত্মক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক ভগ্নাংশও হতে পারে। অর্থাৎ, ভিত্তি $a \in R$ (বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং সূচক $n \in Q$ (মুলদ সংখ্যার সেট) এর জন্য a^n সংজ্ঞায়িত। বিশেষ ক্ষেত্রে, $n \in N$ (স্বাভাবিক সংখ্যার সেট) ধরা হয়। তাছাড়া অমূলদ সূচকও হতে পারে। তবে সেটা দাখিল স্তরের পাঠ্যসূচি বহির্ভূত বলে এখানে আর আলোচনা করা হয়নি।

সূচকের সূত্রাবলি (Index Laws)

ধরি, $a \in R$ (বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং $m, n \in N$ (স্বাভাবিক সংখ্যার সেট)।

সূত্র ১ (গুণ). $a^m \times a^n = a^{m+n}$

সূত্র ২ (ভাগ). $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} \text{ যখন } m \geq n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} \text{ যখন } n > m \end{cases}$

নিচের ছকের খালি ঘরগুলো পূরণ কর:

$a \neq 0, m > n \qquad m = 5, n = 3$	$a \neq 0, n > m \qquad m = 3, n = 5$
$a^5 \times a^3 = (a \times a \times a \times a \times a) \times (a \times a \times a)$ $= a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^8 = a^{5+3}$	$a^3 \times a^5 =$
$\dfrac{a^5}{a^3} =$	$\dfrac{a^3}{a^5} = \dfrac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{a^{5-3}}$

$\therefore$ সাধারণভাবে $a^m \times a^n = a^{m+n}$ এবং $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{যখন } m \geq n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{যখন } n > m \end{cases}$

সূত্র ৩ (গুণফলের ঘাত). $(ab)^n = a^n \times b^n$

$$\begin{aligned}
\text{লক্ষ করি, } (5 \times 2)^3 &= (5 \times 2) \times (5 \times 2) \times (5 \times 2)\ [\because a^3 = a \times a \times a,\ a = 5 \times 2] \\
&= (5 \times 5 \times 5) \times (2 \times 2 \times 2) \\
&= 5^3 \times 2^3 \\
\text{সাধারণভাবে, } (ab)^n &= ab \times ab \times ab \times \ldots \times ab\ [n \text{ সংখ্যক } ab \text{ এর ক্রমিক গুণ}] \\
&= (a \times a \times a \times \ldots \times a) \times (b \times b \times b \times \ldots \times b) \\
&= a^n \times b^n
\end{aligned}$$

সূত্র ৪ (ভাগফলের ঘাত). $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n},\ (b \neq 0)$

লক্ষ করি, $\left(\dfrac{5}{2}\right)^3 = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{5}{2} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{5^3}{2^3}$

$$\begin{aligned}
\text{সাধারণভাবে, } \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \ldots \times \frac{a}{b}\ \left[n \text{ সংখ্যক } \frac{a}{b} \text{ এর ক্রমিক গুণ}\right] \\
&= \frac{a \times a \times a \times \ldots \times a}{b \times b \times b \times \ldots \times b} = \frac{a^n}{b^n}
\end{aligned}$$

সূত্র ৫ (ঘাতের ঘাত). $(a^m)^n = a^{mn}$

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= a^m \times a^m \times a^m \times \ldots \times a^m\ [n \text{ সংখ্যক } a^m \text{ এর ক্রমিক গুণ}] \\
&= a^{m+m+m \ldots +m}\ [\text{ঘাতে } n \text{ সংখ্যক সূচকের যোগফল}] \\
&= a^{m \times n} = a^{mn}
\end{aligned}$$

$\therefore (a^m)^n = a^{mn}$

শূন্য ও ঋণাত্মক সূচক (Zero and Negative Indices)

সূচকে সূত্রাবলির প্রয়োগ ক্ষেত্র সকল পূর্ণসংখ্যা সম্প্রসারণের লক্ষ্যে a^0 এবং a^{-n} (যেখানে n স্বাভাবিক সংখ্যা) এর সংজ্ঞা দেয়া প্রয়োজন।

সংজ্ঞা ১ (শূন্য সূচক). $a^0 = 1,\ (a \neq 0)$

সংজ্ঞা ২ (ঋণাত্মক সূচক). $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\ (a \neq 0, n \in N)$

এই সংজ্ঞা দুইটির ফলে সূচক বিধি m এবং n এর সকল পূর্ণসাংখ্যিক মানের জন্য বলবৎ থাকে এবং এরূপ সকল সূচকের জন্য $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ খাটে।

লক্ষ কর, $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

কিন্তু $\frac{a^n}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \ldots \times a \quad (n \text{ সংখ্যক})}{a \times a \times a \times \ldots \times a \quad (n \text{ সংখ্যক})} = 1$

$\therefore a^0 = 1$

আর $\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$

উদাহরণ ১. মান নির্ণয় কর: ক) $\frac{5^2}{5^3}$ খ) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

সমাধান:

ক) $\frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$

খ) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

উদাহরণ ২. সরল কর: ক) $\frac{5^4 \times 8 \times 16}{2^5 \times 125}$ খ) $\frac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$

সমাধান:

ক) $\frac{5^4 \times 8 \times 16}{2^5 \times 125} = \frac{5^4 \times 2^3 \times 2^4}{2^5 \times 5^3} = \frac{5^4 \times 2^{3+4}}{5^3 \times 2^5} = \frac{5^4}{5^3} \times \frac{2^7}{2^5}$

$= 5^{4-3} \times 2^{7-5} = 5^1 \times 2^2 = 5 \times 4 = 20$

খ) $\frac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}} = \frac{3 \cdot 2^n - 2^2 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^n \cdot 2^{-1}} = \frac{3 \cdot 2^n - 2^{2+n-2}}{2^n - 2^n \cdot \frac{1}{2}}$

$= \frac{3 \cdot 2^n - 2^n}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 2^n} = \frac{(3-1) \cdot 2^n}{\frac{1}{2} \cdot 2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{\frac{1}{2} \cdot 2^n} = 2 \cdot 2 = 4$

উদাহরণ ৩. দেখাও যে, $(a^p)^{q-r} \cdot (a^q)^{r-p} \cdot (a^r)^{p-q} = 1$

সমাধান: $(a^p)^{q-r} \cdot (a^q)^{r-p} \cdot (a^r)^{p-q} = a^{p(q-r)} \cdot a^{q(r-p)} \cdot a^{r(p-q)}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$= a^{pq-pr} \cdot a^{qr-pq} \cdot a^{pr-qr} = a^{pq-pr+qr-pq+pr-qr} = a^0 = 1$

কাজ: খালি ঘর পূরণ কর:

ক) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{\square}$ খ) $5^{\square} \times 5^3 = 5^5$ গ) $a^2 \times a^{\square} = a^{-3}$

ঘ) $(-5)^0 = \square$ ঙ) $\frac{4}{4^{\square}} = 1$

n তম মূল (n th Root)

লক্ষ করি, $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2$

আবার, $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5$

$\therefore \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5$

$5^{\frac{1}{2}}$ এর বর্গ (দ্বিতীয় ঘাত) $= 5$ এবং 5 এর বর্গমূল (দ্বিতীয় মূল) $= 5^{\frac{1}{2}}$

$5^{\frac{1}{2}}$ কে বর্গমূলের চিহ্ন $\sqrt{\ }$ এর মাধ্যমে $\sqrt{5}$ আকারে লেখা হয়।

আরো লক্ষ করি, $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3$

আবার, $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 5^{3\times\frac{1}{3}} = 5$

$5^{\frac{1}{3}}$ এর ঘন (তৃতীয় ঘাত) $= 5$ এবং 5 এর ঘনমূল (তৃতীয় মূল) $= 5^{\frac{1}{3}}$

$5^{\frac{1}{3}}$ কে ঘনমূলের চিহ্ন $\sqrt[3]{\ }$ এর মাধ্যমে $\sqrt[3]{5}$ আকারে লেখা হয়।

n তম মূলের ক্ষেত্রে,

$a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}$ [n সংখ্যক $a^{\frac{1}{n}}$ এর ক্রমিক গুণ] $= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$

আবার, $a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}$

$= a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}$ [সূচকে n সংখ্যক $\frac{1}{n}$ এর যোগ]

$= a^{n\times\frac{1}{n}} = a$

$\therefore \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$

$a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত a এবং a এর n তম মূল $a^{\frac{1}{n}}$

অর্থাৎ, $a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ এবং a এর n তম মূল $(a)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

a এর n তম মূলকে $\sqrt[n]{a}$ আকারে লেখা হয়।

উদাহরণ ৪. সরল কর: ক) $(12)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{54}$ খ) $(-3)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

সমাধান:

ক) $(12)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{54} = \frac{1}{(12)^{\frac{1}{2}}} \times (54)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{(2^2 \times 3)^{\frac{1}{2}}} \times (3^3 \times 2)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{(2^2)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} \times (3^3 \times 2)^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^1} \times \frac{3^1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{1-\frac{1}{2}}}{2^{1-\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$$

খ) $(-3)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = (-3)(-3)(-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -27 \times \frac{1}{4} = -\frac{27}{4}$

কাজ: সরল কর: ক) $\frac{2^4 \cdot 2^2}{32}$ খ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}}$ গ) $8^{\frac{3}{4}} \div 8^{\frac{1}{2}}$

লক্ষণীয়:

ক) $a > 0,\ a \neq 1$ শর্তে $a^x = a^y$ হলে $x = y$

খ) $a > 0,\ b > 0,\ x \neq 0$ শর্তে $a^x = b^x$ হলে $a = b$

উদাহরণ ৫. সমাধান কর: $4^{x+1} = 32$

সমাধান: $4^{x+1} = 32$ বা, $(2^2)^{x+1} = 32$ বা, $2^{2x+2} = 2^5$

$\therefore 2x + 2 = 5$ $[a^x = a^y$ হলে, $x = y]$

বা, $2x = 5 - 2$ বা, $2x = 3$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

অনুশীলনী ৪.১

সরল কর (১ - ৮):

১. $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}}$

২. $\frac{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$

৩. $(2^{-1} + 5^{-1})^{-1}$

৪. $(2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$

৫. $\left(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b}\right)^2$

৬. $\sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}$
$(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$

৭. $\frac{2^{n+4} - 4 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$

৮. $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

প্রমাণ কর (৯ - ১৫):

৯. $\dfrac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1$

১০. $\dfrac{2^{2p+1} \cdot 3^{2p+q} \cdot 5^{p+q} \cdot 6^p}{3^{p-2} \cdot 6^{2p+2} \cdot 10^p \cdot 15^q} = \dfrac{1}{2}$

১১. $\left(\dfrac{a^l}{a^m}\right)^n \cdot \left(\dfrac{a^m}{a^n}\right)^l \cdot \left(\dfrac{a^n}{a^l}\right)^m = 1$

১২. $\dfrac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \dfrac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \dfrac{a^{r+p}}{a^{2q}} = 1$

১৩. $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$

১৪. $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$

১৫. $\left(\dfrac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \cdot \left(\dfrac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \cdot \left(\dfrac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} = 1$

১৬. যদি $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = a$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz = 1$

সমাধান কর (১৭ - ২০):

১৭. $4^x = 8$

১৮. $2^{2x+1} = 128$

১৯. $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{2x-1}$

২০. $2^x + 2^{1-x} = 3$

২১. $P = x^a$, $Q = x^b$ এবং $R = x^c$

ক) $P^{bc} \cdot Q^{-ca}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $\left(\dfrac{P}{Q}\right)^{a+b} \times \left(\dfrac{Q}{R}\right)^{b+c} \div 2(RP)^{a-c}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) দেখাও যে, $\left(\dfrac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\dfrac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\dfrac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$

২২. $X = (2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$, $Y = \sqrt[pq]{\dfrac{x^p}{x^q}} \times \sqrt[qr]{\dfrac{x^q}{x^r}} \times \sqrt[rp]{\dfrac{x^r}{x^p}}$

এবং $Z = \dfrac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}} \div \dfrac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}}$, যেখানে $x, p, q, r > 0$

ক) X এর মান নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, $Y + \sqrt[4]{81} = 4$

গ) দেখাও যে, $Y \div Z = 25$

লগারিদম (Logarithms)

সূচকীয় রাশির মান বের করতে **লগারিদম** (Logarithms) ব্যবহার করা হয়। সাধারণ লগারিদমকে সংক্ষেপে **লগ** (Log) লেখা হয়। বড় বড় সংখ্যা বা রাশির গুণফল, ভাগফল ইত্যাদি লগারিদমের সাহায্যে সহজে নির্ণয় করা যায়।

আমরা জানি, $2^3 = 8$ এই গাণিতিক উক্তিটিকে লগের মাধ্যমে লেখা হয় $\log_2 8 = 3$। আবার, বিপরীতক্রমে, $\log_2 8 = 3$ হলে, সূচকের মাধ্যমে লেখা যাবে $2^3 = 8$। অর্থাৎ, $2^3 = 8$ হলে $\log_2 8 = 3$ এবং বিপরীতক্রমে, $\log_2 8 = 3$ হলে $2^3 = 8$। একইভাবে, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ কে লগের মাধ্যমে লেখা যায়, $\log_2 \frac{1}{8} = -3$।

$a^x = N, (a > 0, a \neq 1)$ হলে, $x = \log_a N$ কে N এর a **ভিত্তিক লগ** বলা হয়।

দ্রষ্টব্য: x ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন, $a > 0$ হলে a^x সর্বদা ধনাত্মক। তাই শুধু ধনাত্মক সংখ্যারই লগের মান আছে যা বাস্তব। শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগের বাস্তব মান নেই।

কাজ: নিচের সারণিগুলোতে সূচক হতে লগের মাধ্যমে প্রকাশ কর:

সূচকের মাধ্যমে	লগের মাধ্যমে
$10^2 = 100$	
$3^{-2} = \frac{1}{9}$	
$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$	
$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\sqrt[4]{2^4} = 2$	

সূচকের মাধ্যমে	লগের মাধ্যমে
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$e^0 = \ldots$ $a^0 = 1$	$\log_e 1 = \ldots$ $\ldots = \ldots$
$10^1 = 10$	$\log_{10} 10 = 1$
$e^1 = \ldots$	$\ldots = \ldots$
$\ldots = \ldots$	$\log_a a = 1$

লগারিদমের সূত্রাবলি (Laws of Logarithms)

ধরি, $a > 0,\ a \neq 1;\ b > 0,\ b \neq 1$ এবং $M > 0,\ N > 0$

সূত্র ৬ (শূন্য ও এক লগ). $a > 0,\ a \neq 1$ হলে ক) $\log_a 1 = 0$ খ) $\log_a a = 1$

প্রমাণ: সূচকের সূত্র হতে জানি, $a^0 = 1$

$\therefore$ লগের সংজ্ঞা হতে পাই, $\log_a 1 = 0$ (প্রমাণিত)

আবার, সূচকের সূত্র হতে জানি, $a^1 = a$

$\therefore$ লগের সংজ্ঞা হতে পাই, $\log_a a = 1$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৭ (গুণফলের লগ). $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

প্রমাণ: ধরি, $\log_a M = x,\ \log_a N = y$

$\therefore M = a^x,\ N = a^y$

এখন, $MN = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\therefore \log_a(MN) = x + y$

বা, $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ [x, y এর মান বসিয়ে]

$\therefore \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ (প্রমাণিত)

দ্রষ্টব্য: $\log_a(MNP\ldots) = \log_a M + \log_a N + \log_a P + \ldots$

দ্রষ্টব্য: $\log_a(M \pm N) \neq \log_a M \pm \log_a N$

সূত্র ৮ (ভাগফলের লগ). $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

প্রমাণ: ধরি, $\log_a M = x,\ \log_a N = y$

$\therefore M = a^x,\ N = a^y$

এখন, $\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\therefore \log_a \dfrac{M}{N} = x - y$

$\therefore \log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৯ (ঘাতের লগ). $\log_a M^r = r\log_a M$

প্রমাণ: ধরি, $\log_a M = x,\ \therefore M = a^x$

বা, $(M)^r = (a^x)^r$ বা, $M^r = a^{rx}$

$\therefore \log_a M^r = rx$ বা, $\log_a M^r = r\log_a M$

$\therefore \log_a M^r = r\log_a M$ (প্রমাণিত)।

দ্রষ্টব্য: $(\log_a M)^r$ এবং $r\log_a M$ সমান নাও হতে পারে।

যেমন $(\log_2 4)^5 = (\log_2 2^2)^5 = 2^5 = 32,\ 5\log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10 \neq 32$

সূত্র ১০ (ভিত্তি পরিবর্তন). $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

প্রমাণ: ধরি, $\log_a M = x,\ \log_b M = y$

$\therefore a^x = M,\ b^y = M$

$\therefore a^x = b^y$ বা, $(a^x)^{\frac{1}{y}} = (b^y)^{\frac{1}{y}}$ বা, $b = a^{\frac{x}{y}}$

$\therefore \frac{x}{y} = \log_a b$ বা, $x = y\log_a b$

বা, $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত ১. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ অথবা $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

প্রমাণ: আমরা জানি, $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

$M = a$ বসিয়ে পাই, $\log_a a = \log_b a \times \log_a b$

বা, $1 = \log_b a \times \log_a b$

$\therefore \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ অথবা $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৬. মান নির্ণয় কর: ক) $\log_{10}100$ খ) $\log_3\frac{1}{9}$ গ) $\log_{\sqrt{3}}81$

সমাধান:

ক) $\log_{10}100 = \log_{10}10^2 = 2\log_{10}10$ $[\because \log_{10}M^r = r\log_{10}M]$

$= 2 \times 1 = 2$ $[\because \log_a a = 1]$

খ) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \log_3 3^{-2} = -2\log_3 3$ $[\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= -2 \times 1 = -2$ $[\because \log_a a = 1]$

গ) $\log_{\sqrt{3}}81 = \log_{\sqrt{3}}3^4 = \log_{\sqrt{3}}\{(\sqrt{3})^2\}^4 = \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^8$

$= 8\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 8 \times 1 = 8$ $[\because \log_a a = 1]$

উদাহরণ ৭. ক) $5\sqrt{5}$ এর 5 ভিত্তিক লগ কত? খ) 400 এর লগ 4 হলে লগের ভিত্তি কত?

সমাধান:

ক) $5\sqrt{5}$ এর 5 ভিত্তিক লগ

$= \log_5 5\sqrt{5} = \log_5(5 \times 5^{\frac{1}{2}}) = \log_5 5^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{2}\log_5 5$ $[\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$ $[\because \log_a a = 1]$

খ) ধরি, ভিত্তি a

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $\log_a 400 = 4$

$\therefore a^4 = 400$

বা, $a^4 = (20)^2 = \{(2\sqrt{5})^2\}^2 = (2\sqrt{5})^4$

$\therefore a = 2\sqrt{5}$ $\quad [\because a^x = b^x, a^x \neq 0, a = b]$

$\therefore$ ভিত্তি $2\sqrt{5}$

উদাহরণ ৮. x এর মান নির্ণয় কর: ক) $\log_{10} x = -2$ খ) $\log_x 324 = 4$

সমাধান:

ক) $\log_{10} x = -2$

বা, $x = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$

$\therefore x = 0.01$

খ) $\log_x 324 = 4$

বা, $x^4 = 324 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 3^4 \times 2^2$

বা, $x^4 = 3^4 \times (\sqrt{2})^4$

বা, $x^4 = (3\sqrt{2})^4$

$\therefore x = 3\sqrt{2}$

উদাহরণ ৯. প্রমাণ কর যে, $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 40$

সমাধান: বামপক্ষ $= 3\log_{10} 2 + \log_{10} 5$

$= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 5 \quad [\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= \log_{10} 8 + \log_{10} 5$

$= \log_{10}(8 \times 5) \quad [\because \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N]$

$= \log_{10} 40 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১০. সরল কর: $\frac{\log_{10}\sqrt{27} + \log_{10} 8 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10} 1.2}$

সমাধান: $\frac{\log_{10}\sqrt{27} + \log_{10} 8 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10} 1.2}$

$= \frac{\log_{10}(3^3)^{\frac{1}{2}} + \log_{10} 8 - \log_{10}(10^3)^{\frac{1}{2}}}{\log_{10}\frac{12}{10}}$

$= \frac{\log_{10} 3^{\frac{3}{2}} + \log_{10} 2^3 - \log_{10}(10)^{\frac{3}{2}}}{\log_{10} 12 - \log_{10} 10}$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log_{10}3 + 3\log_{10}2 - \frac{3}{2}\log_{10}10}{\log_{10}(3 \times 2^2) - \log_{10}10}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(\log_{10}3 + 2\log_{10}2 - 1)}{\log_{10}3 + 2log_{10}2 - 1} \quad [\because \log_{10}10 = 1]$$

$$= \frac{3}{2}$$

অনুশীলনী ৪.২

১. মান নির্ণয় কর:

ক) $\log_3 81$ খ) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ গ) $\log_4 2$

ঘ) $\log_{2\sqrt{5}} 400$ ঙ) $\log_5(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})$

২. x এর মান নির্ণয় কর:

ক) $\log_5 x = 3$ খ) $\log_x 25 = 2$ গ) $\log_x \frac{1}{16} = -2$

৩. দেখাও যে,

ক) $5\log_{10}5 - \log_{10}25 = \log_{10}125$

খ) $\log_{10}\frac{50}{147} = \log_{10}2 + 2\log_{10}5 - \log_{10}3 - 2\log_{10}7$

গ) $3\log_{10}2 + 2\log_{10}3 + \log_{10}5 = \log_{10}360$

৪. সরল কর:

ক) $7\log_{10}\frac{10}{9} - 2\log_{10}\frac{25}{24} + 3\log_{10}\frac{81}{80}$

খ) $\log_7(\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt{7}) - \log_3\sqrt[3]{3} + \log_4 2$

গ) $\log_e\frac{a^3b^3}{c^3} + \log_e\frac{b^3c^3}{d^3} + \log_e\frac{c^3d^3}{a^3} - 3\log_e b^2c$

৫. $x = 2, y = 3, z = 5, w = 7$

ক) $\sqrt{y^3}$ এর 3 ভিত্তিক লগ নির্ণয় কর।

খ) $w\log\frac{xz}{y^2} - x\log\frac{z^2}{x^2y} + y\log\frac{y^4}{x^4z}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) দেখাও যে, $\frac{\log\sqrt{y^3} + y\log x - \frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy) - \log z} = \log_y\sqrt{y^3}$

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ (Scientific or Standard Form of Numbers)

সূচকের সাহায্যে আমরা অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে সহজ আকারে প্রকাশ করতে পারি। যেমন, আলোর গতি $= 300000$ কি.মি./সে. $= 300000000$ মিটার/সে.

$= 3 \times 100000000$ মি./সে. $= 3 \times 10^8$ মি./সে.

আবার, একটি হাইড্রোজেন পরমাণুর ব্যাসার্ধ

$= 0.0000000037$ সে. মি.

$= \frac{37}{10000000000}$ সে.মি. $= 37 \times 10^{-10}$ সে.মি.

$= 3.7 \times 10 \times 10^{-10}$ সে.মি. $= 3.7 \times 10^{-9}$ সে.মি.

সুবিধার্থে অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে প্রকাশ করা হয়, যেখানে, $1 \leq a < 10$ এবং $n \in Z$। কোনো সংখ্যার $a \times 10^n$ রূপকে বলা হয় সংখ্যাটির **বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ**।

কাজ: নিচের সংখ্যাগুলোকে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ কর:

ক) 15000 খ) 0.000512 গ) 123.000512

লগারিদম পদ্ধতি (Logarithmic Method)

লগারিদম পদ্ধতি দুই ধরনের:

ক) **স্বাভাবিক লগারিদম** (Natural Logarithm): স্কটল্যান্ডের গণিতবিদ জন নেপিয়ার (John Napier: 1550-1617) ১৬১৪ সালে e কে ভিত্তি ধরে প্রথম লগারিদম সম্পর্কিত বই প্রকাশ করেন। e একটি অমূলদ সংখ্যা, $e = 2.71828\ldots$। তাঁর এই লগারিদমকে **নেপিরিয়ান লগারিদম** বা e **ভিত্তিক লগারিদম** বা **তত্ত্বীয় লগারিদম**ও বলা হয়। $\log_e x$ কে $\ln x$ আকারেও লেখা হয়।

খ) **সাধারণ লগারিদম** (Common Logarithm): ইংল্যান্ডের গণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (Henry Briggs: 1561-1630) ১৬২৪ সালে 10 কে ভিত্তি ধরে **লগারিদমের টেবিল** (**লগ টেবিল** বা **লগ সারণি**) তৈরি করেন। তাঁর এই লগারিদমকে **ব্রিগস লগারিদম** বা 10 **ভিত্তিক লগারিদম** বা **ব্যাবহারিক লগারিদম**ও বলা হয়। এই লগারিদমকে $\log_{10} x$ আকারে লেখা হয়।

দ্রষ্টব্য: লগারিদমের ভিত্তির উল্লেখ না থাকলে রাশির (বীজগণিতীয়) ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10 কে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয়। লগ সারণিতে ভিত্তি 10 ধরতে হয়।

সাধারণ লগের পূর্ণক (Characteristics of Common Log)

একটি সংখ্যা N কে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ করে পাই,

$N = a \times 10^n$, যেখানে $N > 0, 1 \leq a < 10$ এবং $n \in Z$

উভয়পক্ষে 10 ভিত্তিতে লগ নিয়ে পাই,

$\log_{10}N = \log_{10}(a \times 10^n) = \log_{10}a + \log_{10}10^n = \log_{10}a + n\log_{10}10$

$\therefore \log_{10}N = n + \log_{10}a \; [\because \log_{10}10 = 1]$

ভিত্তি 10 উহ্য রেখে পাই, $\log N = n + \log a$

n কে বলা হয় $\log N$ এর **পূর্ণক**।

দ্রষ্টব্য: নিচের ছক থেকে লক্ষ করি: প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশে যতগুলো অঙ্ক থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে সেই অঙ্কসংখ্যার চেয়ে 1 কম এবং তা হবে ধনাত্মক। অর্থাৎ উল্লিখিত অঙ্ক সংখ্যা m হলে সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে $m - 1$।

N	N এর বৈজ্ঞানিক রূপ	সূচক	দশমিক বিন্দুর বামের অংশের অঙ্কসংখ্যা	পূর্ণক
6237	6.237×10^3	3	4	$4 - 1 = 3$
623.7	6.237×10^2	2	3	$3 - 1 = 2$
62.37	6.237×10^1	1	2	$2 - 1 = 1$
6.237	6.237×10^0	0	1	$1 - 0 = 0$
0.6237	6.237×10^{-1}	-1	0	$0 - 1 = -1$

দ্রষ্টব্য: এবার নিচের ছক থেকে লক্ষ করি: প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশ না থাকলে দশমিক বিন্দু ও এর পরের প্রথম সার্থক অঙ্কের মাঝে যতগুলো 0 (শূন্য) থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে শূন্যের সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি এবং তা হবে ঋণাত্মক। অর্থাৎ উল্লিখিত শূন্যের সংখ্যা k হলে সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে $\{-(k+1)\}$।

পূর্ণক ঋনাত্মক হলে, পূর্ণকটির বামে '$-$' চিহ্ন না দিয়ে পূর্ণকটির উপরে '$\bar{\ }$' (বার চিহ্ন) দিয়ে লেখা হয়। যেমন, পূর্ণক -3 কে লেখা হবে $\bar{3}$ দিয়ে। তা না হলে অংশকসহ লগের সম্পূর্ণ অংশটি ঋণাত্মক বুঝাবে।

N	N এর বৈজ্ঞানিক রূপ	সূচক	দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী সার্থক অঙ্কের মাঝে 0 এর সংখ্যা	পূর্ণক
0.6237	6.237×10^{-1}	-1	0	$-(0+1) = -1 = \bar{1}$
0.06237	6.237×10^{-2}	-2	1	$-(1+1) = -2 = \bar{2}$
0.006237	6.237×10^{-3}	-3	2	$-(2+1) = -3 = \bar{3}$

দ্রষ্টব্য: পূর্ণক ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে, কিন্তু অংশক সর্বদা ধনাত্মক।

উদাহরণ ১১. নিচের সংখ্যাগুলোর লগের পূর্ণক নির্ণয় কর:

ক) 5570 খ) 45.70 গ) 0.4305 ঘ) 0.000435

সমাধান:

ক) $5570 = 5.570 \times 1000 = 5.570 \times 10^3$

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 3

অন্যভাবে, 5570 সংখ্যাটিতে অঙ্কের সংখ্যা 4টি।

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= 4 - 1 = 3$

খ) $45.70 = 4.570 \times 10^1$

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 1

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিকের বামে, অর্থাৎ পূর্ণ অংশে 2টি অঙ্ক আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= 2 - 1 = 1$

গ) $0.4305 = 4.305 \times 10^{-1}$ $\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক -1

অন্যভাবে, সংখ্যার দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী ১ম সার্থক অঙ্ক 4 এর মাঝে কোনো 0 (শূন্য) নেই, অর্থাৎ শূন্যটি 0 আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= -(0+1) = -1 = \bar{1}$

$\therefore$ 0.4305 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $\bar{1}$

ঘ) $0.000435 = 4.35 \times 10^{-4}$

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক -4 বা $\bar{4}$

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী ১ম সার্থক অঙ্ক 4 এর মাঝে 3টি 0 আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির পূর্ণক $= -(3+1) = -4 = \bar{4}$

$\therefore$ 0.000435 সংখ্যাটির পূর্ণক $\bar{4}$

সাধারণ লগের অংশক (Mantissa of Common Log)

কোনো সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক 1 অপেক্ষা ছোট একটি অঋণাত্মক সংখ্যা। এটি মূলত অমূলদ সংখ্যা। তবে একটি নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত অংশকের মান বের করা হয়। কোনো সংখ্যার লগের অংশক লগ তালিকা থেকে বের করা যায়। আবার তা ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও বের করা যায়। আমরা দ্বিতীয় পদ্ধতিতে, অর্থাৎ ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সংখ্যার লগের অংশক বের করবো।

উদাহরণ ১২. $\log 2717$ এর পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর:

সমাধান: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি: $\boxed{AC}$ $\boxed{\log}$ $\boxed{2717}$ $\boxed{=}$ 3.43409

$\therefore \log 2717$ এর পূর্ণক 3 এবং অংশক $.43409$

উদাহরণ ১৩. $\log 43.517$ এর পূর্ণক ও অংশক বের কর।

সমাধান: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি: $\boxed{AC}$ $\boxed{\log}$ $\boxed{43.517}$ $\boxed{=}$ 1.63866

$\therefore \log 43.517$ এর পূর্ণক 1 এবং অংশক $.63866$

উদাহরণ ১৪. 0.00836 এর লগের পূর্ণক ও অংশক কত?

সমাধান: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি: $\boxed{AC}$ $\boxed{\log}$ $\boxed{0.00836}$ $\boxed{=}$ -2.07779

$-2.07779 = -3 + 0.92221 = \bar{3}.92221$

$\therefore \log 0.00836$ এর পূর্ণক -3 এবং অংশক $.92221$, অংশকটি সর্বদা অঋণাত্মক হওয়ায় এখানে পূর্ণকের '$-$' চিহ্নটি সংখ্যাটির ওপরে দেখানো হয়।

উদাহরণ ১৫. $\log_e 10$ নির্ণয় কর:

সমাধান: $\log_e 10 = \dfrac{1}{\log_{10} e} = \dfrac{1}{\log_{10} 2.71828} = \dfrac{1}{0.43429}$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$= 2.30259$ (প্রায়)

বিকল্প পদ্ধতিতে, ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি: $\boxed{AC}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{10}$ $\boxed{=}$ 2.30259

কাজ: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলোর 10 ও e ভিত্তিক লগ নির্ণয় কর:
ক) 2550 খ) 52.143 গ) 0.4145 ঘ) 0.0742

অনুশীলনী ৪.৩

১. কোন শর্তে $a^0 = 1$?
   ক) $a = 0$ খ) $a \neq 0$ গ) $a > 0$ ঘ) $a \neq 1$

২. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$ এর মান নিচের কোনটি?
   ক) $\sqrt[6]{5}$ খ) $(\sqrt[3]{5})^3$ গ) $(\sqrt{5})^3$ ঘ) $\sqrt[3]{25}$

৩. $\log_a a = 1$ সঠিক কোন শর্তে?
   ক) $a > 0$ খ) $a \neq 1$ গ) $a > 0, a \neq 1$ ঘ) $a \neq 0, a > 1$

৪. $\log_x 4 = 2$ হলে, x এর মান কত?
   ক) 2 খ) ± 2 গ) 4 ঘ) 10

৫. একটি সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে লেখার জন্য শর্ত কোনটি?
   ক) $1 < a < 10$ খ) $1 \leq a \leq 10$ গ) $1 \leq a < 10$ ঘ) $1 < a \leq 10$

৬. $a > 0,\ b > 0$ এবং $a \neq 1,\ b \neq 1$ হলে

   (i) $\log_a b \times \log_b a = 1$

   (ii) $\log_a M^r = M \log_a r$

   (iii) $\log_a(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a}) = \frac{5}{6}$

   ওপরের কোন তথ্যগুলো সঠিক?
   ক) i খ) ii গ) i ও iii ঘ) ii ও iii

৭. 0.0035 এর সাধারণ লগের পূর্ণক কত?
   ক) 3 খ) 1 গ) $\bar{2}$ ঘ) $\bar{3}$

0.0225 সংখ্যাটি বিবেচনা করে নিচের (৮ - ১০) প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

৮. সংখ্যাটির a^n আকার নিচের কোনটি সঠিক?
   ক) $(2.5)^2$ খ) $(.015)^2$ গ) $(1.5)^2$ ঘ) $(.15)^2$

৯. সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক আকার নিচের কোনটি?
   ক) 225×10^{-4} খ) 22.5×10^{-3} গ) 2.25×10^{-2} ঘ) $.225 \times 10^{-1}$

১০. সংখ্যাটির সাধারণ লগের পূর্ণক কত?
   ক) $\bar{2}$ খ) $\bar{1}$ গ) 0 ঘ) 2

১১. বৈজ্ঞানিক রূপে প্রকাশ কর:
   ক) 6530 খ) 60.831 গ) 0.000245 ঘ) 37500000
   ঙ) 0.00000014

১২. সাধারণ দশমিক রূপে প্রকাশ কর:
ক) 10^5 খ) 10^{-5} গ) 2.53×10^4 ঘ) 9.813×10^{-3}
ঙ) 3.12×10^{-5}

১৩. নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক বের কর (ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে):
ক) 4820 খ) 72.245 গ) 1.734 ঘ) 0.045
ঙ) 0.000036

১৪. ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর:
ক) 27 খ) 63.147 গ) 1.405 ঘ) 0.0456
ঙ) 0.000673

১৫. গুণফলের/ভাগফলের সাধারণ লগ (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) নির্ণয় কর:
ক) 5.34×8.7 খ) 0.79×0.56 গ) $22.2642 \div 3.42$
ঘ) $0.19926 \div 32.4$

১৬. যদি $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$ এবং $\log 7 = 0.85410$ হয়, তবে নিচের রাশিগুলোর মান নির্ণয় কর:
ক) $\log 9$ খ) $\log 28$ গ) $\log 42$

১৭. দেওয়া আছে, $x = 1000$ এবং $y = 0.0625$

ক) x কে $a^n b^n$ আকারে প্রকাশ কর, যেখানে a ও b মৌলিক সংখ্যা।

খ) x ও y এর গুণফলকে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ কর।

গ) xy এর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর।

অধ্যায় ৫

এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ (Equations in One Variable)

আমরা পূর্বের শ্রেণিতে চলক ও সমীকরণ কী তা জেনেছি এবং এদের ব্যবহার শিখেছি। এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণের সমাধান করতে শিখেছি এবং বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সরল সমীকরণ গঠন করে তা সমাধান করা সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান লাভ করেছি। এ অধ্যায়ে এক চলকবিশিষ্ট একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ এবং অভেদ সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে এবং বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সমাধানে এদের ব্যবহার দেখানো হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- চলকের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমীকরণ ও অভেদের পার্থক্য ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- একঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার একঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবে ও সমাধান সেট নির্ণয় করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।

চলক (Variable)

আমরা জানি, $x+3=5$ একটি সমীকরণ। এটি সমাধান করতে হলে আমরা অজ্ঞাত রাশি x এর মান বের করি। এখানে অজ্ঞাত রাশি x একটি চলক। আবার, $x+a=5$ সমীকরণটি সমাধান করতে হলে, আমরা x এর মান নির্ণয় করি, a এর মান নয়। এখানে x কে চলক ও a কে ধ্রুবক হিসাবে ধরা হয়। এক্ষেত্রে x এর মান a এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। তবে a এর মান নির্ণয় করতে হলে, আমরা লিখবো $a=5-x$; অর্থাৎ a এর মান x এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। এখানে a চলক ও x ধ্রুবক হিসাবে বিবেচিত। তবে বিশেষ কোনো নির্দেশনা না থাকলে প্রচলিত রীতি অনুযায়ী x কে চলক হিসাবে ধরা হয়। সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার ছোট হাতের শেষের দিকের অক্ষর x, y, z কে চলক হিসাবে এবং প্রথম দিকের অক্ষর a, b, c কে ধ্রুবক হিসেবে ব্যবহার করা হয়।

যে সমীকরণে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাকে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলা হয়। যেমন, $x+3=5$, $x^2-5x+b=0$, $2y^2+5y-3=0$ ইত্যাদি।

যদি একটি সেট $S=\{x : x \in R, 1 \leq x \leq 10\}$ হয়, তবে x-এর মান 1 থেকে 10 পর্যন্ত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। এখানে x একটি চলক। কাজেই আমরা বলতে পারি যে, যখন কোনো অক্ষর প্রতীক কোনো সেটের উপাদান বোঝায় তখন একে চলক বলে।

সমীকরণের ঘাত: কোনো সমীকরণের চলকের সর্বোচ্চ ঘাতকে সমীকরণটির ঘাত বলে। $x+1=5$, $2x-1=x+5$, $y+7=2y-3$ সমীকরণগুলোর প্রত্যেকটির ঘাত 1; এগুলো এক চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ।

আবার, $x^2+5x+6=0$, $y^2-y=12$, $4x^2-2x=3-6x$ সমীকরণগুলোর প্রত্যেকটির ঘাত 2; এগুলো এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। $2x^3-x^2-4x+4=0$ সমীকরণটি এক চলকবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ।

সমীকরণ ও অভেদ (Equation and Identity)

সমীকরণ: সমীকরণে সমান চিহ্নের দুইপক্ষে দুইটি বহুপদী থাকে, অথবা একপক্ষে (প্রধানত ডানপক্ষে) শূন্য থাকতে পারে। দুই পক্ষের বহুপদীর চলকের সর্বোচ্চ ঘাত সমান নাও হতে পারে। সমীকরণ সমাধান করে চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সমান সংখ্যক মান পাওয়া যাবে। এই মান বা মানগুলোকে বলা হয় সমীকরণটির মূল। এই মূল বা মূলগুলো দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। একাধিক মূলের ক্ষেত্রে এগুলো সমান বা অসমান হতে পারে। যেমন, $x^2-5x+6=0$ সমীকরণটির মূল $2, 3$। আবার, $(x-3)^2=0$ সমীকরণে x এর মান 3 হলেও এর মূল $3, 3$।

অভেদ: সমান চিহ্নের দুইপক্ষে সমান ঘাতবিশিষ্ট দুইটি বহুপদী থাকে। চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সংখ্যার চেয়েও অধিক সংখ্যক মানের জন্য অভেদটি সিদ্ধ হবে। সমান চিহ্নের উভয় পক্ষের মধ্যে কোনো ভেদ নেই বলেই অভেদ। যেমন, $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$ একটি অভেদ, এটি x এর সকল মানের জন্য সিদ্ধ হবে। তাই এই সমীকরণটি একটি অভেদ। প্রত্যেক বীজগণিতীয় সূত্র একটি অভেদ। যেমন $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ইত্যাদি অভেদ।

সকল সমীকরণ অভেদ নয়। অভেদে সমান $(=)$ চিহ্নের পরিবর্তে $\equiv$ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। তবে সকল অভেদই সমীকরণ বলে অভেদের ক্ষেত্রেও সাধারণত সমান চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

সমীকরণ ও অভেদের পার্থক্য নিচে দেওয়া হলো:

সমীকরণ	অভেদ
১। সমান চিহ্নের দুই পক্ষে দুইটি বহুপদী থাকতে পারে অথবা এক পক্ষে শূন্য থাকতে পারে।	১। দুই পক্ষে দুইটি বহুপদী থাকে।
২। উভয় পক্ষের বহুপদীর মাত্রা অসমান হতে পারে।	২। উভয় পক্ষে বহুপদীর মাত্রা সমান থাকে।
৩। চলকের এক বা একাধিক মানের জন্য সমতাটি সত্য হয়।	৩। চলকের মূল সেটের সকল মানের জন্য সাধারণত সমতাটি সত্য হয়।
৪। চলকের মানের সংখ্যা সর্বাধিক মাত্রার সমান হতে পারে।	৪। চলকের অসংখ্য মানের জন্য সমতাটি সত্য।
৫। সকল সমীকরণ অভেদ নয়।	৫। সকল বীজগণিতীয় অভেদই সমীকরণ।

কাজ:

ক) নিচের সমীকরণগুলোর কোনটির ঘাত কত ও মূল কয়টি?

(১) $3x + 1 = 5$ (২) $\frac{2y}{5} - \frac{y-1}{3} = \frac{3y}{2}$

খ) তিনটি অভেদ লেখ।

একঘাত সমীকরণের সমাধান (Solving Linear Equations)

সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে কয়েকটি নিয়ম প্রয়োগ করতে হয়। এই নিয়মগুলো জানা থাকলে সমীকরণের সমাধান নির্ণয় সহজতর হয়। নিয়মগুলো হলো:

১. সমীকরণের উভয়পক্ষে একই সংখ্যা বা রাশি যোগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

২. সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে একই সংখ্যা বা রাশি বিয়োগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

৩. সমীকরণের উভয়পক্ষকে একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা গুণ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

৪. সমীকরণের উভয়পক্ষকে অশূন্য একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা ভাগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

উপরের ধর্মগুলোকে বীজগণিতীয় রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়:

যদি $x = a$ এবং $c \neq 0$ হয় তাহলে,

$(i)\ x + c = a + c$ $(ii)\ x - c = a - c$ $(iii)\ xc = ac$ $(iv)\ \frac{x}{c} = \frac{a}{c}$

এছাড়া যদি a, b ও c তিনটি রাশি হয় তবে, $a = b + c$ হলে, $a - b = c$ হবে এবং $a + c = b$ হলে, $a = b - c$ হবে।

এই নিয়মটি পক্ষান্তর বিধি হিসাবে পরিচিত এবং এই বিধি প্রয়োগ করে বিভিন্ন সমীকরণ সমাধান করা হয়।

কোনো সমীকরণের পদগুলো ভগ্নাংশ আকারে থাকলে, লবগুলোতে চলকের ঘাত 1 এবং হরগুলো ধ্রুবক হলে, সেগুলো একঘাত সমীকরণ।

উদাহরণ ১. সমাধান কর: $\frac{5x}{7} - \frac{4}{5} = \frac{x}{5} - \frac{2}{7}$

সমাধান: $\frac{5x}{7} - \frac{4}{5} = \frac{x}{5} - \frac{2}{7}$ বা, $\frac{5x}{7} - \frac{x}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{7}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{25x - 7x}{35} = \frac{28 - 10}{35}$ বা, $\frac{18x}{35} = \frac{18}{35}$

বা, $18x = 18$ বা, $x = 1$

$\therefore$ সমাধান $x = 1$

এখন, আমরা এমন সমীকরণের সমাধান করবো যা দ্বিঘাত সমীকরণের আকারে থাকে। এ সকল সমীকরণ সরলীকরণের মাধ্যমে সমতুল সমীকরণে রূপান্তর করে $ax = b$ আকারের একঘাত সমীকরণে পরিণত করা হয়। আবার, হরে চলক থাকলেও সরলীকরণ করে একঘাত সমীকরণে রূপান্তর করা হয়।

উদাহরণ ২. সমাধান কর: $(y-1)(y+2) = (y+4)(y-2)$

সমাধান: $(y-1)(y+2) = (y+4)(y-2)$

বা, $y^2 - y + 2y - 2 = y^2 + 4y - 2y - 8$

বা, $y - 2 = 2y - 8$

বা, $y - 2y = -8 + 2$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $-y = -6$

বা, $y = 6$

$\therefore$ সমাধান $y = 6$

উদাহরণ ৩. সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ: $\frac{6x+1}{15} - \frac{2x-4}{7x-1} = \frac{2x-1}{5}$

সমাধান: $\frac{6x+1}{15} - \frac{2x-4}{7x-1} = \frac{2x-1}{5}$

বা, $\frac{6x+1}{15} - \frac{2x-1}{5} = \frac{2x-4}{7x-1}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{6x+1-6x+3}{15} = \frac{2x-4}{7x-1}$

বা, $\frac{4}{15} = \frac{2x-4}{7x-1}$

বা, $15(2x-4) = 4(7x-1)$ [আড়গুণন করে]

বা, $30x - 60 = 28x - 4$

বা, $30x - 28x = 60 - 4$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2x = 56$ বা, $x = 28$

$\therefore$ সমাধান $x = 28$

এবং সমাধান সেট $S = \{28\}$

উদাহরণ ৪. সমাধান কর: $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-5}$

সমাধান: $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-5}$

বা, $\dfrac{x-4+x-3}{(x-3)(x-4)} = \dfrac{x-5+x-2}{(x-2)(x-5)}$

বা, $\dfrac{2x-7}{x^2-7x+12} = \dfrac{2x-7}{x^2-7x+10}$

দুই পক্ষের ভগ্নাংশ দুইটির মান সমান। আবার, দুই পক্ষের লব সমান, কিন্তু হর অসমান। এক্ষেত্রে লবের মান একমাত্র শূন্য হলেই দুই পক্ষ সমান হবে।

$\therefore 2x - 7 = 0$ বা, $2x = 7$ বা, $x = \dfrac{7}{2}$

$\therefore$ সমাধান $x = \dfrac{7}{2}$

কাজ: $(\sqrt{5}+1)x + 4 = 4\sqrt{5}$ হলে, দেখাও যে, $x = 6 - 2\sqrt{5}$

একঘাত সমীকরণের ব্যবহার

বাস্তব জীবনে বিভিন্ন ধরনের সমস্যার সমাধান করতে হয়। এই সমস্যা সমাধানের অধিকাংশ ক্ষেত্রেই গাণিতিক জ্ঞান, দক্ষতা ও যুক্তির প্রয়োজন হয়। বাস্তব ক্ষেত্রে গাণিতিক জ্ঞান ও দক্ষতার প্রয়োগে একদিকে যেমন সমস্যার সুষ্ঠু সমাধান হয়, অন্যদিকে তেমনি প্রাত্যহিক জীবনে গণিতের মাধ্যমে সমস্যার সমাধান পাওয়া যায় বিধায়, শিক্ষার্থীরা গণিতের প্রতি আকৃষ্ট হয়। এখানে প্রাত্যহিক জীবনের বিভিন্ন সমস্যাকে সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করে তার সমাধান করা হবে।

বাস্তবভিত্তিক সমস্যা সমাধানে অজ্ঞাত সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য এর পরিবর্তে চলক ধরে নিয়ে সমস্যায় প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করা হয়। তারপর সমীকরণটি সমাধান করলেই চলকটির মান, অর্থাৎ অজ্ঞাত সংখ্যাটি পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৫. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা 2 বেশি। অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 কম হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্কটি x অতএব, একক স্থানীয় অঙ্কটি হবে $x+2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $10x+(x+2)$ বা, $11x+2$

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে পরিবর্তিত সংখ্যাটি হবে $10(x+2)+x$ বা, $11x+20$

প্রশ্নমতে, $11x+20=2(11x+2)-6$

বা, $11x+20=22x+4-6$

বা, $22x-11x=20+6-4$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $11x=22$

বা, $x=2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $11x+2=11\times 2+2=24$

$\therefore$ প্রদত্ত সংখ্যাটি 24

উদাহরণ ৬. একটি শ্রেণির প্রতিবেঞ্চে 4 জন করে ছাত্র বসালে 3টি বেঞ্চ খালি থাকে। আবার, প্রতিবেঞ্চে 3 জন করে ছাত্র বসালে 6 জন ছাত্রকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা কত?

সমাধান: মনে করি, শ্রেণিটির ছাত্র সংখ্যা x

যেহেতু প্রতিবেঞ্চে 4 জন করে বসালে 3টি বেঞ্চ খালি থাকে, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $=\dfrac{x}{4}+3$

আবার, যেহেতু প্রতিবেঞ্চে 3 জন করে বসালে 6 জনকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $=\dfrac{x-6}{3}$

যেহেতু শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা একই থাকবে,

সুতরাং $\dfrac{x}{4}+3=\dfrac{x-6}{3}$ বা, $\dfrac{x+12}{4}=\dfrac{x-6}{3}$

বা, $4x-24=3x+36$ বা, $4x-3x=36+24$

বা, $x=60$

$\therefore$ ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা 60

উদাহরণ ৭. কবির সাহেব তাঁর 56000 টাকার কিছু টাকা বার্ষিক 12% মুনাফায় ও বাকি টাকা বার্ষিক 10% মুনাফায় বিনিয়োগ করলেন। এক বছর পর তিনি মোট 6400 টাকা মুনাফা পেলেন। তিনি 12% মুনাফায় কত টাকা বিনিয়োগ করেছেন?

সমাধান: মনে করি, কবির সাহেব 12% মুনাফায় x টাকা বিনিয়োগ করেছেন।

$\therefore$ তিনি 10% মুনাফায় বিনিয়োগ করেছেন $(56000 - x)$ টাকা।

এখন, x টাকার 1 বছরের মুনাফা $x \times \frac{12}{100}$ টাকা বা, $\frac{12x}{100}$ টাকা।

আবার, $(56000 - x)$ টাকার 1 বছরের মুনাফা $(56000 - x) \times \frac{10}{100}$ টাকা বা, $\frac{10(56000 - x)}{100}$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $\frac{12x}{100} + \frac{10(56000 - x)}{100} = 6400$

বা, $12x + 560000 - 10x = 640000$

বা, $2x = 640000 - 560000$

বা, $2x = 80000$

বা, $x = 40000$

$\therefore$ কবির সাহেব 12% মুনাফায় 40000 টাকা বিনিয়োগ করেছেন।

কাজ: সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর:

ক) $\frac{3}{5}$ ভগ্নাংশটির লব ও হরের প্রত্যেকের সাথে কোন সংখ্যাটি যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে?

খ) দুইটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের অন্তর 151 হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

গ) 120 টি এক টাকার মুদ্রা ও দুই টাকার মুদ্রায় মোট 180 টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কয়টি?

অনুশীলনী ৫.১

সমাধান কর (১ - ৮):

১. $\frac{ay}{b} - \frac{by}{a} = a^2 - b^2$

২. $(z+1)(z-2) = (z-4)(z+2)$

৩. $\frac{4}{2x+1} + \frac{9}{3x+2} = \frac{25}{5x+4}$

৪. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

৫. $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

৬. $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{a}+\dfrac{x-3a-3b}{a+b}=0$

৭. $\dfrac{x-a}{a^2-b^2}=\dfrac{x-b}{b^2-a^2}$

৮. $(3+\sqrt{3})z+2=5+3\sqrt{3}$

সমাধান সেট নির্ণয় কর (৯ - ১৪):

৯. $2x+\sqrt{2}=3x-4-3\sqrt{2}$

১০. $\dfrac{z-2}{z-1}=2-\dfrac{1}{z-1}$

১১. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x-1}$

১২. $\dfrac{m}{m-x}+\dfrac{n}{n-x}=\dfrac{m+n}{m+n-x}$

১৩. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}$

১৪. $\dfrac{2t-6}{9}+\dfrac{15-2t}{12-5t}=\dfrac{4t-15}{18}$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (১৫ - ২৫):

১৫. একটি সংখ্যা অপর একটি সংখ্যার $\dfrac{2}{5}$ গুণ। সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 98 হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

১৬. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 1; লব থেকে 2 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তা $\dfrac{1}{6}$ এর সমান। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

১৭. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 9; অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 45 কম হবে। সংখ্যাটি কত?

১৮. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। দেখাও যে, সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাতগুণ।

১৯. একজন ক্ষুদ্র ব্যবসায়ী 5600 টাকা বিনিয়োগ করে এক বছর পর কিছু টাকার উপর 5% এবং অবশিষ্ট টাকার উপর 4% লাভ করলেন। মোট 256 টাকা লাভ করলে, তিনি কত টাকার উপর 5% লাভ করলেন?

২০. কোনো মাদরাসার একটি শ্রেণিকক্ষে প্রতি বেঞ্চে 6 জন করে ছাত্র বসালে 2 টি বেঞ্চ খালি থাকে। কিন্তু প্রতি বেঞ্চে 5 জন করে ছাত্র বসালে 6 জন ছাত্রকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা কয়টি?

২১. একটি লঞ্চে যাত্রী সংখ্যা 47। মাথাপিছু কেবিনের ভাড়া ডেকের ভাড়ার দ্বিগুণ। ডেকের ভাড়া মাথাপিছু 30 টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 1680 টাকা হলে, কেবিনের যাত্রী সংখ্যা কত?

২২. মোট 120টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রায় মোট 35 টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কয়টি?

২৩. একটি গাড়ি ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কিছু পথ এবং ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করলো। গাড়িটি মোট 5 ঘণ্টায় 240 কি.মি. পথ অতিক্রম করলে, ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কতদূর গিয়েছে?

২৪. ঢাকার নিউমার্কেট থেকে গাবতলীর দূরত্ব 12 কি.মি.। সজল নিউমার্কেট থেকে রিক্সায় ঘণ্টায় 6 কি.মি. বেগে এবং কাজল একই স্থান থেকে পায়ে হেঁটে ঘণ্টায় 4 কি.মি. বেগে গাবতলীর দিকে রওনা হলো। সজল গাবতলী পৌঁছে সেখানে 30 মিনিট বিশ্রাম নিয়ে আবার নিউমার্কেটের দিকে একই বেগে রওনা হলো। তারা নিউমার্কেট থেকে কতদূরে মিলিত হবে?

২৫. একটি স্টিমারে যাত্রী সংখ্যা 376 জন। ডেকের যাত্রীর সংখ্যা কেবিনের যাত্রীর সংখ্যার তিনগুণ। ডেকের যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া 60 টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 33840 টাকা।

ক) ডেকের যাত্রী সংখ্যাকে x ধরে সমীকরণ তৈরি কর।

খ) ডেকের যাত্রী ও কেবিনের যাত্রীর সংখ্যা কত?

গ) কেবিনের মাথাপিছু ভাড়া কত?

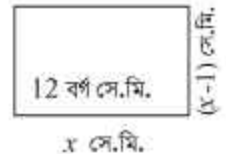
এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ
(Quadratic Equations in One Variable)

$ax^2 + bx + c = 0$ [যেখানে, a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$] আকারের সমীকরণকে এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষ একটি দ্বিমাত্রিক বহুপদী। সমীকরণের ডানপক্ষ শূন্য ধরা হয়।

12 বর্গ সে.মি. ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x সে.মি. ও প্রস্থ $(x-1)$ সে.মি.।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = $x(x-1)$ বর্গ সে.মি.

প্রশ্নমতে, $x(x-1) = 12$ বা $x^2 - x - 12 = 0$

সমীকরণটিতে একটি চলক x এবং x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2। এরূপ সমীকরণ হলো দ্বিঘাত সমীকরণ। যে সমীকরণে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত 2, তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।

আমরা অষ্টম শ্রেণিতে $x^2 + px + q$ এবং $ax^2 + bx + c$ আকারের এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেছি। এখানে আমরা $x^2 + px + q = 0$ এবং $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে চলকের মান নির্ণয়ের মাধ্যমে এরূপ সমীকরণ সমাধান করবো।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে বাস্তব সংখ্যার একটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম প্রয়োগ করা হয়। ধর্মটি নিম্নরূপ:

যদি দুইটি রাশির গুণফল শূন্য হয়, তবে রাশিদ্বয়ের যেকোনোটি অথবা উভয় রাশি শূন্য হবে। অর্থাৎ, দুইটি রাশি a ও b এর গুণফল $ab = 0$ হলে, $a = 0$ বা, $b = 0$, অথবা $a = 0$ এবং $b = 0$ হবে।

উদাহরণ ৮. সমাধান কর: $(x+2)(x-3) = 0$

সমাধান: $(x+2)(x-3) = 0$

$\therefore x + 2 = 0$ অথবা $x - 3 = 0$

$x + 2 = 0$ হলে, $x = -2$

আবার, $x - 3 = 0$ হলে, $x = 3$

$\therefore$ সমাধান $x = -2$ অথবা $x = 3$

উদাহরণ ৯. সমাধান সেট নির্ণয় কর: $y^2 = \sqrt{3}y$

সমাধান: $y^2 = \sqrt{3}y$

বা, $y^2 - \sqrt{3}y = 0$ [পক্ষান্তর করে ডানপক্ষ শূন্য করা হয়েছে]

বা, $y(y - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore y = 0$ অথবা $y - \sqrt{3} = 0$

আবার, $y - \sqrt{3} = 0$ হলে, $y = \sqrt{3}$

$\therefore$ সমাধান সেট $\{0, \sqrt{3}\}$

উদাহরণ ১০. সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ: $x - 4 = \frac{x-4}{x}$

সমাধান: $x - 4 = \frac{x-4}{x}$

বা, $x(x-4) = x - 4$ [আড়গুণন করে]

বা, $x(x-4) - (x-4) = 0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $(x-4)(x-1) = 0$

$\therefore x - 4 = 0$ অথবা $x - 1 = 0$

$x - 4 = 0$ হলে, $x = 4$

আবার, $x-1=0$ হলে, $x=1$

$\therefore$ সমাধান সেট $\{1, 4\}$

উদাহরণ ১১. সমাধান কর: $\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2-5\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)+6=0$

সমাধান: $\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2-5\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)+6=0\ldots(1)$

ধরি, $\dfrac{x+a}{x-a}=y$

$\therefore (1)$ হতে পাই, $y^2-5y+6=0$

বা, $y^2-2y-3y+6=0$

বা, $y(y-2)-3(y-2)=0$

বা, $(y-2)(y-3)=0$

$\therefore y-2=0$ হলে, $y=2$

অথবা $y-3=0$ হলে, $y=3$

এখন, $y=2$ হলে,

$\dfrac{x+a}{x-a}=\dfrac{2}{1}$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $x+a=2(x-a)$ [আড়গুণন করে]

বা, $x+a=2x-2a$

বা, $2x-x=a+2a$

বা, $x=3a$

আবার, $y=3$ হলে,

$\dfrac{x+a}{x-a}=\dfrac{3}{1}$

বা, $x+a=3(x-a)$ [আড়গুণন করে]

বা, $x+a=3x-3a$

বা, $3x-x=a+3a$

বা, $x=2a$

$\therefore$ সমাধান $x=2a$ অথবা, $x=3a$

কাজ:

ক) $x^2 - 1 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে a, b, c এর মান লেখ।

খ) $(x-1)^2$ সমীকরণটির ঘাত কত? এর মূল কয়টি ও কী কী?

দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যবহার

আমাদের দৈনন্দিন জীবনের অনেক সমস্যা এক চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত সমীকরণে রূপান্তর করে সহজে সমাধান করা যায়। এখানে, বাস্তবভিত্তিক সমস্যায় প্রদত্ত শর্ত থেকে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করার কৌশল দেখানো হলো।

উদাহরণ ১২. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের হর, লব অপেক্ষা 4 বেশি। ভগ্নাংশটি বর্গ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তার হর, লব অপেক্ষা 40 বেশি হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ভগ্নাংশটির লব x এবং হর $x+4$

সুতরাং ভগ্নাংশটি $\dfrac{x}{x+4}$

ভগ্নাংশটির বর্গ $= \left(\dfrac{x}{x+4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{(x+4)^2} = \dfrac{x^2}{x^2+8x+16}$

এখানে, লব $= x^2$ এবং হর $= x^2 + 8x + 16$

প্রশ্নমতে, $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 40$

বা, $8x + 16 = 40$

বা, $8x = 40 - 16$

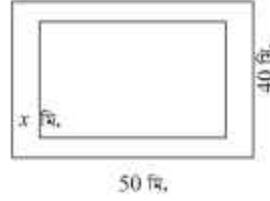
বা, $8x = 24$

বা, $x = 3$

$\therefore x + 4 = 3 + 4 = 7$

$\therefore \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{3}{7}$

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $\dfrac{3}{7}$

উদাহরণ ১৩. 50 মিটার দৈর্ঘ্য এবং 40 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তাকার বাগানের ভিতরের চারদিকে সমান চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার হলে, রাস্তাটি কত মিটার চওড়া?

সমাধান: মনে করি, রাস্তাটি x মিটার চওড়া।

রাস্তা বাদে বাগানটির দৈর্ঘ্য $(50 - 2x)$ মিটার এবং প্রস্থ $(40 - 2x)$ মিটার

$\therefore$ রাস্তা বাদে বাগানটির ক্ষেত্রফল = $(50 - 2x) \times (40 - 2x)$ বর্গমিটার।

প্রশ্নমতে, $(50 - 2x) \times (40 - 2x) = 1200$

বা, $2000 - 80x - 100x + 4x^2 = 1200$

বা, $4x^2 - 180x + 800 = 0$

বা, $x^2 - 45x + 200 = 0$ [4 দিয়ে ভাগ করে]

বা, $x^2 - 5x - 40x + 200 = 0$

বা, $x(x - 5) - 40(x - 5) = 0$

বা, $(x - 5)(x - 40) = 0$

$\therefore x - 5 = 0$ অথবা $x - 40 = 0$

$x - 5 = 0$ হলে, $x = 5$

$x - 40 = 0$ হলে, $x = 40$

কিন্তু রাস্তাটি বাগানটির প্রস্থ 40 মিটার থেকে কম চওড়া হবে।

$\therefore x \neq 40$; $\therefore x = 5$

$\therefore$ রাস্তাটি 5 মিটার চওড়া।

উদাহরণ ১৪. শাহিক 240 টাকায় কতগুলো কলম কিনল। সে যদি ঐ টাকায় একটি কলম বেশি পেতো তবে প্রতিটি কলমের দাম গড়ে 1 টাকা কম পড়তো। সে কতগুলো কলম কিনল?

সমাধান: মনে করি, শাহিক 240 টাকায় মোট x টি কলম কিনেছিল। এতে প্রতিটি কলমের দাম পড়ে $\frac{240}{x}$ টাকা।

সে যদি 240 টাকায় $(x + 1)$ টি কলম পেতো তবে প্রতিটি কলমের দাম পড়তো $\frac{240}{x+1}$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $\frac{240}{x+1} = \frac{240}{x} - 1$

বা, $\frac{240}{x+1} = \frac{240-x}{x}$

বা, $240x = (x+1)(240-x)$ [আড়গুণন করে]

বা, $240x = 240x + 240 - x^2 - x$

বা, $x^2 + x - 240 = 0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $x^2 + 16x - 15x - 240 = 0$

বা, $x(x+16) - 15(x+16) = 0$

বা, $(x+16)(x-15) = 0$

$\therefore x + 16 = 0$, অথবা $x - 15 = 0$

$x + 16 = 0$ হলে, $x = -16$

$x - 15 = 0$ হলে, $x = 15$

কিন্তু কলমের সংখ্যা x ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore x \neq -16$; $\therefore x = 15$

$\therefore$ শাহিক 15টি কলম কিনেছিল।

কাজ: সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর:

ক) একটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সাথে ঐ সংখ্যাটি যোগ করলে যোগফল ঠিক পরবর্তী স্বাভাবিক সংখ্যার নয়গুণের সমান হবে। সংখ্যাটি কত?

খ) 10 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র হতে একটি জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য বৃত্তটির অর্ধ-জ্যা অপেক্ষা 2 সে.মি. কম। আনুমানিক চিত্র অঙ্কন করে জ্যাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উদাহরণ ১৫. একটি মাদরাসার নবম শ্রেণির একটি পরীক্ষায় x জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত মোট নম্বর 1950। একই পরীক্ষায় অন্য একজন নতুন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর 34 যোগ করায় প্রাপ্ত নম্বরের গড় 1 কমে গেল।

ক) পৃথকভাবে x জন ছাত্রের এবং নতুন ছাত্রসহ সকলের প্রাপ্ত নম্বরের গড় x এর মাধ্যমে লেখ।

খ) প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করে দেখাও যে, $x^2 + 35x - 1950 = 0$

গ) x এর মান বের করে উভয় ক্ষেত্রে নম্বরের গড় কত তা নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) x জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় = $\frac{1950}{x}$

নতুন ছাত্রের নম্বরসহ $(x+1)$ জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় $= \dfrac{1950+34}{x+1} = \dfrac{1984}{x+1}$

খ) প্রশ্নমতে, $\dfrac{1950}{x} = \dfrac{1984}{x+1} + 1$

বা, $\dfrac{1950}{x} - \dfrac{1984}{x+1} = 1$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\dfrac{1950x + 1950 - 1984x}{x(x+1)} = 1$

বা, $x^2 + x = 1950x - 1984x + 1950$ [আড়গুণন করে]

বা, $x^2 + x = 1950 - 34x$

$\therefore x^2 + 35x - 1950 = 0$ [দেখানো হলো]

গ) $x^2 + 35x - 1950 = 0$

বা, $x^2 + 65x - 30x - 1950 = 0$

বা, $x(x+65) - 30(x+65) = 0$

বা, $(x+65)(x-30) = 0$

$\therefore x + 65 = 0$ অথবা $x - 30 = 0$

$x + 65 = 0$ হলে, $x = -65$

আবার, $x - 30 = 0$ হলে, $x = 30$

যেহেতু ছাত্রের সংখ্যা x ঋণাত্মক হতে পারে না,

সুতরাং, $x \neq -65$

$\therefore x = 30$

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে গড় = $\dfrac{1950}{30} = 65$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে গড় = $\dfrac{1984}{31} = 64$

অনুশীলনী ৫.২

১. x কে চলক ধরে $a^2x + b = 0$ সমীকরণটির ঘাত নিচের কোনটি?

ক) 3 খ) 2 গ) 1 ঘ) 0

২. নিচের কোনটি অভেদ?

ক) $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 4x$ খ) $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1)$

গ) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2ab$ ঘ) $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

৩. $(x-4)^2 = 0$ সমীকরণের মূল কয়টি?

২০২৫

ক) 1 টি খ) 2 টি গ) 3 টি ঘ) 4 টি

৪. $x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় নিচের কোনটি?

ক) $3, 4$ খ) $3, -4$ গ) $-3, 4$ ঘ) $-3, -4$

৫. $3x^2 - x + 5 = 0$ সমীকরণে x এর সহগ কত?

ক) 3 খ) 2 গ) 1 ঘ) -1

৬. দুইটি বীজগাণিতিক রাশি x ও y এর গুণফল $xy = 0$ হলে

(i) $x = 0$ অথবা $y = 0$

(ii) $x = 0$ এবং $y \neq 0$

(iii) $x \neq 0$ এবং $y = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

৭. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ সমীকরণের সমাধান সেট নিচের কোনটি?

ক) $\{a, b\}$ খ) $\{a, -b\}$ গ) $\{-a, b\}$ ঘ) $\{-a, -b\}$

দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ এবং একক স্থানীয় অঙ্ক x। এই তথ্যের আলোকে নিচের (৮ - ১০) প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

৮. সংখ্যাটি কত?

ক) $2x$ খ) $3x$ গ) $12x$ ঘ) $21x$

৯. অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি কত হবে?

ক) $3x$ খ) $4x$ গ) $12x$ ঘ) $21x$

১০. $x = 2$ হলে, মূল সংখ্যার সাথে স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যার পার্থক্য কত?

ক) 18 খ) 20 গ) 34 ঘ) 36

সমাধান কর (১১ - ১৭):

১১. $(y + 5)(y - 5) = 24$

১২. $(\sqrt{2}x + 3)(\sqrt{3}x - 2) = 0$

১৩. $2(z^2 - 9) + 9z = 0$

১৪. $\dfrac{3}{2z + 1} + \dfrac{4}{5z - 1} = 2$

১৫. $\dfrac{x - 2}{x + 2} + \dfrac{6(x - 2)}{x - 6} = 1$

১৬. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b} + \dfrac{b}{x}$

১৭. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

সমাধান সেট নির্ণয় কর (১৮ - ২২):

১৮. $\frac{3}{x}+\frac{4}{x+1}=2$

১৯. $\frac{x+7}{x+1}+\frac{2x+6}{2x+1}=5$

২০. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$

২১. $x+\frac{1}{x}=2$

২২. $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (২৩ - ৩৪):

২৩. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 15 এবং এদের গুণফল 56; সংখ্যাটি কত?

২৪. একটি আয়তাকার ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। মেঝের দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে ও প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

২৫. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 15 সে.মি. ও অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অন্তর 3 সে.মি.। ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২৬. একটি ত্রিভুজের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 সে.মি. বেশি। ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 810 বর্গ সে.মি. হলে, এর উচ্চতা কত?

২৭. একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে প্রত্যেকে তার সহপাঠীর সংখ্যার সমান টাকা চাঁদা দেওয়ায় মোট 420 টাকা চাঁদা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত এবং প্রত্যেকে কত টাকা করে চাঁদা দিল?

২৮. একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে, প্রত্যেকে তত পয়সার চেয়ে আরও 30 পয়সা বেশি করে চাঁদা দেওয়াতে মোট 70 টাকা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত?

২৯. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 7; অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা থেকে 9 বেশি।

ক) চলক x এর মাধ্যমে প্রদত্ত সংখ্যাটি ও স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি লেখ।

খ) সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

গ) প্রদত্ত সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় যদি সেন্টিমিটারে কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্দেশ করে তবে ঐ আয়তক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। কর্ণটিকে কোনো বর্গের বাহু ধরে বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩০. একটি সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে $(x-1)$ সে.মি. ও x সে.মি. এবং একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ত্রিভুজটির উচ্চতার সমান। আবার, একটি আয়তক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $x+3$ সে.মি. ও প্রস্থ x সে.মি.।

ক) একটিমাত্র চিত্রের মাধ্যমে তথ্যগুলো দেখাও।

খ) ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 10 বর্গ সে.মি. হলে, এর উচ্চতা কত?

গ) ত্রিভুজক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারাবাহিক অনুপাত বের কর।

৩১. একটি জমির ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। জমিটির দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে এবং প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। আবার জমিটির মাঝখানে 20 সে.মি. ব্যাস বিশিষ্ট একটি বৃত্ত আঁকা হলো। বৃত্তটির কেন্দ্র থেকে একটি জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা এর অর্ধেকের চেয়ে 2 সে.মি. কম।

ক) জমিটির দৈর্ঘ্যকে x এবং প্রস্থকে y ধরে তথ্যগুলোকে সমীকরণে প্রকাশ কর।

খ) জমিটির পরিসীমা নির্ণয় কর।

গ) বৃত্তটির জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩২. নাবিলের বয়স যখন রাফির বর্তমান বয়সের সমান ছিল তখন রাফির যে বয়স ছিল নাবিলের বর্তমান বয়স তার দ্বিগুণ। রাফির বয়স যখন নাবিলের বর্তমান বয়সের সমান হবে তখন তাদের দুইজনের বয়সের যোগফল 63 হলে প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত?

৩৩. বাসে ওঠার লাইনে সোহাগের পিছনে যতজন দাঁড়িয়ে আছে সামনে তার থেকে দুইজন বেশি দাঁড়িয়ে আছে। তার পিছনে যতজন দাঁড়িয়ে আছে সম্পূর্ণ লাইনে তার তিনগুণ যাত্রী। লাইনে কতজন যাত্রী দাঁড়িয়ে আছে?

৩৪. মাহাদী $3:30$টার সময় বাসা থেকে ড্রয়িং ক্লাসে গেল। সে যখন মাদরাসা থেকে বাসায় ফিরেছিল তখনও মিনিটের কাঁটা খাড়া নিচের দিকে ছিল কিন্তু $3:30$টার তুলনায় দুইটি কাঁটার মধ্যে দূরত্ব 30 ডিগ্রি কম ছিল। মাহাদী মাদরাসা থেকে বাসায় কখন ফিরেছিল?

অধ্যায় ৬

রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ (Lines, Angles and Triangles)

[এই অধ্যায়ের প্রয়োজনীয় পূর্বজ্ঞান বইয়ের শেষে পরিশিষ্ট অংশে সংযুক্ত আছে। প্রথমে পরিশিষ্ট অংশ পাঠ/আলোচনা করতে হবে।]

জ্যামিতি বা 'Geometry' গণিত শাস্ত্রের একটি প্রাচীন শাখা। 'Geometry' শব্দটি গ্রিক geo - ভূমি (earth) ও metron - পরিমাপ (measure) শব্দের সমন্বয়ে তৈরি। তাই 'জ্যামিতি' শব্দের অর্থ 'ভূমি পরিমাপ'। কৃষিভিত্তিক সভ্যতার যুগে ভূমি পরিমাপের প্রয়োজনেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছিল। তবে জ্যামিতি আজকাল কেবল ভূমি পরিমাপের জন্যই ব্যবহৃত হয় না, বরং বহু জটিল গাণিতিক সমস্যা সমাধানে জ্যামিতিক জ্ঞান এখন অপরিহার্য। প্রাচীন সভ্যতার নিদর্শনগুলোতে জ্যামিতি চর্চার প্রমাণ পাওয়া যায়। ঐতিহাসিকদের মতে প্রাচীন মিশরে আনুমানিক চার হাজার বছর আগেই ভূমি জরিপের কাজে জ্যামিতিক ধ্যান-ধারণা ব্যবহার করা হতো। প্রাচীন মিশর, ব্যাবিলন, ভারত, চীন ও ইনকা সভ্যতার বিভিন্ন ব্যাবহারিক কাজে জ্যামিতির প্রয়োগের নিদর্শন রয়েছে। পাক-ভারত উপমহাদেশে সিন্ধু উপত্যকার সভ্যতায় জ্যামিতির বহুল ব্যবহার ছিল। হরপ্পা ও মহেঞ্জোদারোর খননে সুপরিকল্পিত নগরীর অস্তিত্বের প্রমাণ মেলে। শহরের রাস্তাগুলো ছিল সমান্তরাল এবং ভূগর্ভস্থ নিষ্কাশন ব্যবস্থা ছিল উন্নত। তাছাড়া ঘরবাড়ির আকার দেখে বোঝা যায় যে, শহরের অধিবাসীরা ভূমি পরিমাপেও দক্ষ ছিলেন। বৈদিক যুগে বেদি তৈরিতে নির্দিষ্ট জ্যামিতিক আকার ও ক্ষেত্রফল মেনে চলা হতো। এগুলো প্রধানত ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ও ট্রাপিজিয়াম আকারের সমন্বয়ে গঠিত হতো।

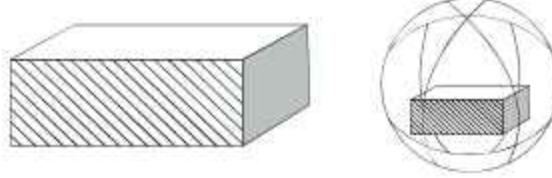
তবে প্রাচীন গ্রিক সভ্যতার যুগেই জ্যামিতির প্রণালীবদ্ধ রূপটি সুস্পষ্টভাবে লক্ষ করা যায়। গ্রিক গণিতবিদ থেলিসকে প্রথম জ্যামিতিক প্রমাণের কৃতিত্ব দেয়া হয়। তিনি যুক্তিমূলক প্রমাণ দেন যে, ব্যাস দ্বারা বৃত্ত দ্বিবিভক্ত হয়। থেলিসের পরে পিথাগোরাস জ্যামিতিক তত্ত্বের বিস্তৃতি ঘটান। আনুমানিক খ্রিষ্টপূর্ব ৩০০ অব্দে গ্রিক পন্ডিত ইউক্লিড জ্যামিতির ইতস্তত বিক্ষিপ্ত সূত্রগুলোকে বিধিবদ্ধভাবে সুবিন্যস্ত করে তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ 'Elements' রচনা করেন। তেরো খণ্ডে সম্পূর্ণ কালোত্তীর্ণ এই গ্রন্থটিই আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তিস্বরূপ। এই অধ্যায়ে ইউক্লিডের অনুসরণে যুক্তিমূলক জ্যামিতি আলোচনা করা হবে।

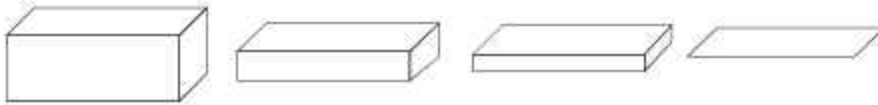
অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- সমতলীয় জ্যামিতির মৌলিক স্বীকার্যগুলো বর্ণনা করতে পারবে।
- ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য ও অনুসিদ্ধান্তগুলো প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

স্থান, তল, রেখা ও বিন্দুর ধারণা
(Concepts of Space, Surface, Line and Point)

আমাদের চারপাশে বিস্তৃত জগৎ (space) সীমাহীন। এর বিভিন্ন অংশ জুড়ে রয়েছে ছোট বড় নানা রকম বস্তু। ছোট বড় বস্তু বলতে বালুকণা, আলপিন, পেন্সিল, কাগজ, বই, চেয়ার, টেবিল, ইট, পাথর, বাড়িঘর, পাহাড়, পৃথিবী, গ্রহ-নক্ষত্র সবই বুঝানো হয়। বিভিন্ন বস্তু স্থানের যে অংশ জুড়ে থাকে সে স্থানটুকুর আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য প্রভৃতি থেকেই জ্যামিতিক ধ্যান-ধারণার উদ্ভব।

কোনো ঘনবস্তু (solid) যে স্থান অধিকার করে থাকে, তা তিন দিকে বিস্তৃত। এ তিন দিকের বিস্তারেই বস্তুটির তিনটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা) নির্দেশ করে। সেজন্য প্রত্যেক ঘনবস্তুই ত্রিমাত্রিক (three dimensional)। যেমন, একটি ইট বা বাক্সের তিনটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা) আছে। একটি গোলকের তিনটি মাত্রা আছে। এর তিন মাত্রার ভিন্নতা স্পষ্ট বোঝা না গেলেও একে দৈর্ঘ্য-প্রস্থ-উচ্চতা বিশিষ্ট খণ্ডে বিভক্ত করা যায়।

ঘনবস্তুর উপরিভাগ তল (surface) নির্দেশ করে অর্থাৎ, প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন, একটি বাক্সের ছয়টি পৃষ্ঠ ছয়টি সমতলের প্রতিরূপ। গোলকের উপরিভাগও একটি তল। তবে বাক্সের পৃষ্ঠতল ও গোলকের পৃষ্ঠ তল ভিন্ন প্রকারের। প্রথমটি সমতল (plane), দ্বিতীয়টি বক্রতল (curved surface)।

তল: তল দ্বিমাত্রিক (Two-dimensional)। এর শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, কোনো উচ্চতা নাই। একটি বাক্সের দুইটি মাত্রা ঠিক রেখে তৃতীয় মাত্রা ক্রমশ হ্রাস করে শূন্যে পরিণত করলে, বাক্সটির পৃষ্ঠবিশেষ মাত্র অবশিষ্ট থাকে। এভাবে ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণায় আসা যায়।

দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে একটি রেখা (line) উৎপন্ন হয়। যেমন, বাক্সের দুইটি পৃষ্ঠতল বাক্সের একধারে একটি রেখায় মিলিত হয়। এই রেখা একটি সরলরেখা (straight line)। একটি লেবুকে একটি পাতলা ছুরি দিয়ে কাটলে, ছুরির সমতল যেখানে লেবুর বক্রতলকে ছেদ করে সেখানে একটি বক্ররেখা (curved line) উৎপন্ন হয়।

রেখা: রেখা একমাত্রিক (One-dimensional)। এর শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই। বাক্সের একটি পৃষ্ঠ-তলের প্রস্থ ক্রমশ হ্রাস পেয়ে সম্পূর্ণ শূন্য হলে, ঐ তলের একটি রেখা মাত্র অবশিষ্ট থাকে। এভাবে তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণায় আসা যায়।

দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করলে বিন্দুর উৎপত্তি হয়। অর্থাৎ, দুইটি রেখার ছেদস্থান বিন্দু (point) দ্বারা নির্দিষ্ট হয়। বাক্সের দুইটি ধার যেমন, বাক্সের এক কোনায় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই, শুধু অবস্থান আছে। একটি রেখার দৈর্ঘ্য ক্রমশঃ হ্রাস পেলে অবশেষে একটি বিন্দুতে পর্যবসিত হয়। বিন্দুকে শূন্য মাত্রার সত্তা (entity) বলে গণ্য করা হয়।

ইউক্লিডের স্বীকার্য (Euclid's Postulates)

উপরে তল, রেখা ও বিন্দু সম্পর্কে যে ধারণা দেওয়া হলো, তা তল, রেখা ও বিন্দুর সংজ্ঞা নয় - বর্ণনা মাত্র। এই বর্ণনায় মাত্রা বলতে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা ইত্যাদি ধারণা ব্যবহার করা হয়েছে, যেগুলো সংজ্ঞায়িত নয়। ইউক্লিড তাঁর 'Elements' গ্রন্থের প্রথম খণ্ডের শুরুতেই বিন্দু, রেখা ও তলের যে সংজ্ঞা উল্লেখ করেছেন তা-ও আধুনিক দৃষ্টিভঙ্গি অনুসারে অসম্পূর্ণ। ইউক্লিড প্রদত্ত কয়েকটি বর্ণনা নিম্নরূপ:

১. যার কোনো অংশ নাই, তাই বিন্দু।

২. রেখার প্রান্ত বিন্দু নাই।

৩. যার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, কিন্তু প্রস্থ ও উচ্চতা নাই, তাই রেখা।

৪. যে রেখার উপরিস্থিত বিন্দুগুলো একই বরাবরে থাকে, তাই সরলরেখা।

৫. যার কেবল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, তাই তল।

৬. তলের প্রান্ত হলো রেখা।

৭. যে তলের সরলরেখাগুলো তার ওপর সমভাবে থাকে, তাই সমতল।

লক্ষ করলে দেখা যায় যে, এই বর্ণনায় অংশ, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, সমভাবে ইত্যাদি শব্দগুলো অসংজ্ঞায়িতভাবে গ্রহণ করা হয়েছে। ধরে নেয়া হয়েছে যে, এগুলো সম্পর্কে আমাদের প্রাথমিক ধারণা রয়েছে। এসব ধারণার উপর ভিত্তি করে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলের ধারণা দেওয়া হয়েছে। বাস্তবিক পক্ষে, যেকোনো গাণিতিক আলোচনায় এক বা একাধিক প্রাথমিক ধারণা স্বীকার করে নিতে হয়। ইউক্লিড এগুলোকে স্বতঃসিদ্ধ (axioms) বলে আখ্যায়িত করেন। ইউক্লিড প্রদত্ত কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ:

১. যে সকল বস্তু একই বস্তুর সমান, সেগুলো পরস্পর সমান।

২. সমান সমান বস্তুর সাথে সমান বস্তু যোগ করা হলে যোগফল সমান।

৩. সমান সমান বস্তু থেকে সমান বস্তু বিয়োগ করা হলে বিয়োগফল সমান।

৪. যা পরস্পরের সাথে মিলে যায়, তা পরস্পর সমান।

৫. পূর্ণ তার অংশের চেয়ে বড়।

আধুনিক জ্যামিতিতে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলকে প্রাথমিক ধারণা হিসাবে গ্রহণ করে এদের কিছু বৈশিষ্ট্যকে স্বীকার করে নেওয়া হয়। এই স্বীকৃত বৈশিষ্ট্যগুলোকে জ্যামিতিক স্বীকার্য (postulate) বলা হয়। বাস্তব ধারণার সঙ্গে সঙ্গতি রেখেই এই স্বীকার্যসমূহ নির্ধারণ করা হয়েছে। ইউক্লিড প্রদত্ত পাঁচটি স্বীকার্য হলো:

স্বীকার্য ১. একটি বিন্দু থেকে অন্য একটি বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা আঁকা যায়।

স্বীকার্য ২. খন্ডিত রেখাকে যথেচ্ছভাবে বাড়ানো যায়।

স্বীকার্য ৩. যেকোনো কেন্দ্র ও যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকা যায়।

স্বীকার্য ৪. সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

স্বীকার্য ৫. একটি সরলরেখা দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম হলে, রেখা দুইটিকে যথেচ্ছভাবে বর্ধিত করলে যেদিকে কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম, সেদিকে মিলিত হয়।

ইউক্লিড সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যগুলোর সাহায্যে যুক্তিমূলক নতুন প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করেন। তিনি সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ, স্বীকার্য ও প্রমাণিত প্রতিজ্ঞার সাহায্যে আবার নতুন একটি প্রতিজ্ঞাও প্রমাণ করেন। ইউক্লিড তার 'এলিমেন্টস' গ্রন্থে মোট ৪৬৫টি শৃঙ্খলাবদ্ধ প্রতিজ্ঞার প্রমাণ দিয়েছেন যা আধুনিক যুক্তিমূলক জ্যামিতির ভিত্তি।

লক্ষ করি যে, ইউক্লিডের প্রথম স্বীকার্যে কিছু অসম্পূর্ণতা রয়েছে। দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যে একটি অনন্য সরলরেখা অঙ্কন করা যায় তা উপেক্ষিত হয়েছে। পঞ্চম স্বীকার্য অন্য চারটি স্বীকার্যের চেয়ে জটিল। অন্যদিকে, প্রথম থেকে চতুর্থ স্বীকার্যগুলো এত সহজ যে এগুলো 'স্পষ্টই সত্য' বলে প্রতীয়মান হয়। কিন্তু এগুলো প্রমাণ করা যায় না। সুতরাং, উক্তিগুলো 'প্রমাণবিহীন সত্য' বা স্বীকার্য বলে মেনে নেয়া হয়। পঞ্চম স্বীকার্যটি সমান্তরাল সরলরেখার সাথে জড়িত বিধায় পরবর্তীতে আলোচনা করা হবে।

সমতল জ্যামিতি (Plane Geometry)

পূর্বেই বিন্দু, সরলরেখা ও সমতল জ্যামিতির তিনটি প্রাথমিক ধারণা উল্লেখ করা হয়েছে। এদের যথাযথ সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব না হলেও এদের সম্পর্কে আমাদের বাস্তব অভিজ্ঞতাপ্রসূত ধারণা হয়েছে। বিমূর্ত জ্যামিতিক ধারণা হিসাবে স্থানকে বিন্দুসমূহের সেট ধরা হয় এবং সরলরেখা ও সমতলকে এই সার্বিক সেটের উপসেট বিবেচনা করা হয়। অর্থাৎ,

স্বীকার্য ১. জগৎ (space) সকল বিন্দুর সেট এবং সমতল ও সরলরেখা এই সেটের উপসেট।

এই স্বীকার্য থেকে আমরা লক্ষ করি যে, প্রত্যেক সমতল ও প্রত্যেক সরলরেখা এক একটি সেট, যার উপাদান হচ্ছে বিন্দু। জ্যামিতিক বর্ণনায় সাধারণত সেট প্রতীকের ব্যবহার পরিহার করা হয়। যেমন, কোনো বিন্দু একটি সরলরেখার (বা সমতলের) অন্তর্ভুক্ত হলে বিন্দুটি ঐ সরলরেখায় (বা সমতলে) অবস্থিত অথবা, সরলরেখাটি (বা সমতলটি) ঐ বিন্দু দিয়ে যায়। একইভাবে, একটি সরলরেখা একটি

সমতলের উপসেট হলে সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত, অথবা, সমতলটি ঐ সরলরেখা দিয়ে যায় এ রকম বাক্য দ্বারা তা বর্ণনা করা হয়।

সরলরেখা ও সমতলের বৈশিষ্ট্য হিসেবে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য ২. দুইটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সরলরেখা আছে, যাতে উভয় বিন্দু অবস্থিত।

স্বীকার্য ৩. একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সমতল আছে, যাতে বিন্দু তিনটি অবস্থিত।

স্বীকার্য ৪. কোনো সমতলের দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখা ঐ সমতলে অবস্থিত।

স্বীকার্য ৫.

ক) জগতে (space) একাধিক সমতল বিদ্যমান।

খ) প্রত্যেক সমতলে একাধিক সরলরেখা অবস্থিত।

গ) প্রত্যেক সরলরেখার বিন্দুসমূহ এবং বাস্তব সংখ্যাসমূহকে এমনভাবে সম্পর্কিত করা যায় যেন, রেখাটির প্রত্যেক বিন্দুর সঙ্গে একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয় এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার সঙ্গে রেখাটির একটি অনন্য বিন্দু সংশ্লিষ্ট হয়।

মন্তব্য: স্বীকার্য ১ থেকে স্বীকার্য ৫ কে আপতন স্বীকার্য (incidence axiom) বলা হয়।

জ্যামিতিতে দূরত্বের ধারণাও একটি প্রাথমিক ধারণা। এ জন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য ৬.

ক) P ও Q বিন্দুযুগল একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করে থাকে। সংখ্যাটিকে P বিন্দু থেকে Q বিন্দুর দূরত্ব বলা হয় এবং PQ দ্বারা সূচিত করা হয়।

খ) P ও Q ভিন্ন বিন্দু হলে PQ সংখ্যাটি ধনাত্মক। অন্যথায়, $PQ = 0$।

গ) P থেকে Q এর দূরত্ব এবং Q থেকে P এর দূরত্ব একই। অর্থাৎ $PQ = QP$।

$PQ = QP$ হওয়াতে এই দূরত্বকে সাধারণত P বিন্দু ও Q বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বলা হয়। ব্যাবহারিকভাবে, এই দূরত্ব পূর্ব নির্ধারিত এককের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

স্বীকার্য ৫ (গ) অনুযায়ী প্রত্যেক সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট ও বাস্তব সংখ্যার সেটের মধ্যে এক-এক মিল স্থাপন করা যায়। এ প্রসঙ্গে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য ৭. কোনো সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যার সেটের মধ্যে এমনভাবে এক-এক মিল স্থাপন করা যায়, যেন রেখাটির যেকোনো দুইটি বিন্দু P, Q এর জন্য $PQ = |a - b|$ হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

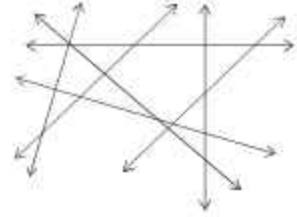
এই স্বীকার্যে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সংখ্যারেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় P বিন্দুর সঙ্গে a সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে P কে a এর লেখবিন্দু এবং a কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয়। কোনো সরলরেখাকে সংখ্যারেখায় পরিণত করার জন্য প্রথমে রেখাটির একটি

বিন্দুর স্থানাঙ্ক 0 এবং অপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 1 ধরে নেওয়া হয়। এতে রেখাটিতে একটি একক দূরত্ব এবং একটি ধনাত্মক দিক নির্দিষ্ট হয়। এ জন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য ৮. যেকোনো সরলরেখা AB কে এমনভাবে সংখ্যারেখায় পরিণত করা যায় যে, A এর স্থানাঙ্ক 0 এবং B এর স্থানাঙ্ক ধনাত্মক হয়।

মন্তব্য: স্বীকার্য ৬ কে **দূরত্ব স্বীকার্য**, স্বীকার্য ৭ কে **রুলার স্বীকার্য** এবং স্বীকার্য ৮ কে **রুলার স্থাপন স্বীকার্য** বলা হয়।

জ্যামিতিক বর্ণনাকে স্পষ্ট করার জন্য চিত্র ব্যবহার করা হয়। কাগজের ওপর পেন্সিল বা কলমের সূক্ষ্ম ফোঁটা দিয়ে বিন্দুর প্রতিরূপ আঁকা হয়। সোজা রুলার বরাবর দাগ টেনে সরলরেখার প্রতিরূপ আঁকা হয়। সরলরেখার চিত্রে দুই দিকে তীরচিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয় যে, রেখাটি উভয়দিকে সীমাহীনভাবে বিস্তৃত। স্বীকার্য ২ অনুযায়ী দুইটি ভিন্ন বিন্দু A ও B একটি অনন্য সরলরেখা নির্দিষ্ট করে যাতে বিন্দু দুইটি অবস্থিত হয়। এই রেখাকে AB রেখা বা BA রেখা বলা হয়। স্বীকার্য ৫ (গ) অনুযায়ী এরূপ প্রত্যেক সরলরেখা অসংখ্য বিন্দু ধারণ করে।

স্বীকার্য (৫) (ক) অনুযায়ী জগতে একাধিক সমতল বিদ্যমান। এরূপ প্রত্যেক সমতলে অসংখ্য সরলরেখা রয়েছে। জ্যামিতির যে শাখায় একই সমতলে অবস্থিত বিন্দু, রেখা এবং এদের সঙ্গে সম্পর্কিত বিভিন্ন জ্যামিতিক সত্তা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়, তাকে সমতল জ্যামিতি (plane geometry) বলা হয়। এ পুস্তকে সমতল জ্যামিতিই আমাদের মূল বিবেচ্য বিষয়। সুতরাং, বিশেষ কোনো উল্লেখ না থাকলে বুঝতে হবে যে, আলোচ্য সকল বিন্দু, রেখা ইত্যাদি একই সমতলে অবস্থিত। এরূপ একটি নির্দিষ্ট সমতলই আলোচনার সার্বিক সেট। এছাড়া শুধু রেখা উল্লেখ করলে আমরা সরলরেখাই বুঝাবো।

গাণিতিক উক্তির প্রমাণ (Proof of Mathematical Statements)

যেকোনো গাণিতিক তত্ত্বে কতিপয় প্রাথমিক ধারণা, সংজ্ঞা এবং স্বীকার্যের উপর ভিত্তি করে ধাপে ধাপে ঐ তত্ত্ব সম্পর্কিত বিভিন্ন উক্তি যৌক্তিকভাবে প্রমাণ করা হয়। এরূপ উক্তিকে সাধারণত প্রতিজ্ঞা বলা হয়। প্রতিজ্ঞার যৌক্তিকতা প্রমাণের জন্য যুক্তিবিদ্যার কিছু নিয়ম প্রয়োগ করা হয়। যেমন:

১. আরোহ পদ্ধতি (Mathematical Induction)

২. অবরোহ পদ্ধতি ((Mathematical Deduction)

৩. বিরোধ পদ্ধতি (Proof by contradiction) ইত্যাদি।

বিরোধ পদ্ধতি (Proof by contradiction)

দার্শনিক এরিস্টটল যুক্তিমূলক প্রমাণের এ পদ্ধতিটির সূচনা করেন। এ পদ্ধতির ভিত্তি হলো:

১. একই গুণকে একই সময় স্বীকার ও অস্বীকার করা যায় না।

২. একই জিনিসের দুইটি পরস্পরবিরোধী গুণ থাকতে পারে না।

৩. যা পরস্পরবিরোধী তা অচিন্তনীয়।

৪. কোনো বস্তু এক সময়ে যে গুণের অধিকারী হয়, সেই বস্তু সেই একই সময়ে সেই গুণের অনধিকারী হতে পারে না।

জ্যামিতিক প্রমাণ (Geometric Proof)

জ্যামিতিতে কতকগুলো প্রতিজ্ঞাকে বিশেষ গুরুত্ব দিয়ে উপপাদ্য হিসেবে গ্রহণ করা হয় এবং অন্যান্য প্রতিজ্ঞা প্রমাণে ক্রম অনুযায়ী এদের ব্যবহার করা হয়। জ্যামিতিক প্রমাণে বিভিন্ন তথ্য চিত্রের সাহায্যে বর্ণনা করা হয়। তবে প্রমাণ অবশ্যই যুক্তিনির্ভর হতে হবে।

জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞার বর্ণনায় সাধারণ নির্বচন (general enunciation) অথবা বিশেষ নির্বচন (particular enunciation) ব্যবহার করা হয়। সাধারণ নির্বচন হচ্ছে চিত্রনিরপেক্ষ বর্ণনা আর বিশেষ নির্বচন হচ্ছে চিত্রনির্ভর বর্ণনা। কোনো প্রতিজ্ঞার সাধারণ নির্বচন দেওয়া থাকলে প্রতিজ্ঞার বিষয়বস্তু বিশেষ নির্বচনের মাধ্যমে নির্দিষ্ট করা হয়। এ জন্য প্রয়োজনীয় চিত্র অঙ্কন করতে হয়। জ্যামিতিক উপপাদ্যের প্রমাণে সাধারণত নিম্নোক্ত ধাপগুলো থাকে:

১. সাধারণ নির্বচন

২. চিত্র ও বিশেষ নির্বচন

৩. প্রয়োজনীয় অঙ্কনের বর্ণনা এবং

৪. প্রমাণের যৌক্তিক ধাপগুলোর বর্ণনা।

যদি কোনো প্রতিজ্ঞা সরাসরিভাবে একটি উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত থেকে প্রমাণিত হয়, তবে একে অনেক সময় ঐ উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত (corollary) হিসেবে উল্লেখ করা যায়। বিভিন্ন প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করা ছাড়াও জ্যামিতিতে বিভিন্ন চিত্র অঙ্কন করার প্রস্তাবনা বিবেচনা করা হয়। এগুলোকে সম্পাদ্য বলা হয়। সম্পাদ্যে চিত্র অঙ্কন করে চিত্রাঙ্কনের বর্ণনা ও যৌক্তিকতা উল্লেখ করতে হয়।

অনুশীলনী ৬.১

১. স্থান, তল, রেখা এবং বিন্দুর ধারণা দাও।

২. ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য বর্ণনা কর।

৩. পাঁচটি আপতন স্বীকার্য বর্ণনা কর।

৪. দূরত্ব স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

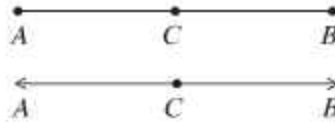
৫. রুলার স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

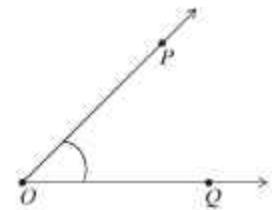
৬. সংখ্যারেখা বর্ণনা কর।

৭. রুলার স্থাপন স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

৮. পরস্পরছেদী সরলরেখা ও সমান্তরাল সরলরেখার সংজ্ঞা দাও।

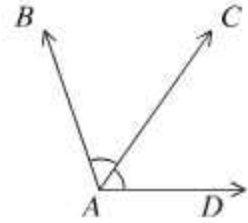
রেখা, রশ্মি, রেখাংশ (Line, Ray, Line Segment)

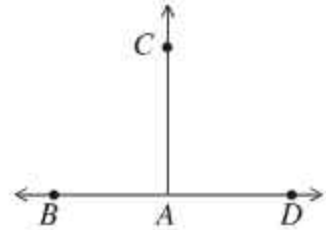
সমতলীয় জ্যামিতির স্বীকার্য অনুযায়ী সমতলে সরলরেখা বিদ্যমান যার প্রতিটি বিন্দু সমতলে অবস্থিত। মনে করি, সমতলে AB একটি সরলরেখা এবং রেখাটির উপর অবস্থিত একটি বিন্দু C। C বিন্দুকে A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী বলা হয় যদি A, C ও B একই সরলরেখার ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু হয় এবং $AC + CB = AB$ হয়। A, C ও B বিন্দু তিনটিকে সমরেখ বিন্দুও বলা হয়। A ও B এবং এদের অন্তর্বর্তী সকল বিন্দুর সেটকে A ও B বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বা সংক্ষেপে AB রেখাংশ বলা হয়। A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী প্রত্যেক বিন্দুকে রেখাংশের অন্তঃস্থ বিন্দু বলা হয়। আবার, C বিন্দু এবং C বিন্দু থেকে AB সরলরেখা বরাবর কোনো একদিকে অসীম পর্যন্ত বিন্দুর সেটকে রশ্মি বলা হয়। C বিন্দু AB সরলরেখাকে CA ও CB রশ্মিতে বিভক্ত করে।

কোণ (Angle)

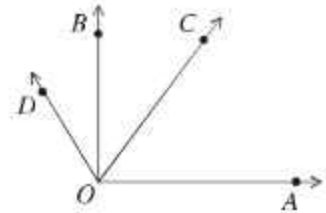
একই সমতলে দুইটি রশ্মির প্রান্তবিন্দু একই হলে কোণ তৈরি হয়। রশ্মি দুইটিকে কোণের বাহু এবং এদের সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলে। চিত্রে, OP ও OQ রশ্মিদ্বয় এদের সাধারণ প্রান্তবিন্দু O তে $\angle POQ$ উৎপন্ন করেছে। O বিন্দুটি $\angle POQ$ এর শীর্ষবিন্দু। OP এর যে পার্শ্বে Q আছে সেই পার্শ্বে এবং OQ এর যে পার্শ্বে P আছে সেই পার্শ্বে অবস্থিত সকল বিন্দুর সেটকে $\angle POQ$ এর অভ্যন্তর বলা হয়। কোণটির অভ্যন্তরে অথবা কোনো বাহুতে অবস্থিত নয় এমন সকল বিন্দুর সেটকে এর বহির্ভাগ বলা হয়।

সরল কোণ (Straight angle)

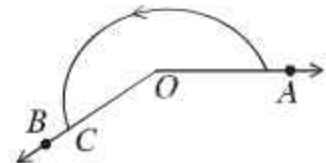
দুইটি পরস্পর বিপরীত রশ্মি এদের সাধারণ প্রান্তবিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে সরল কোণ বলে। পাশের চিত্রে, AB রশ্মির প্রান্তবিন্দু A থেকে AB এর বিপরীত দিকে AC রশ্মি আঁকা হয়েছে। AC ও AB রশ্মিদ্বয় এদের সাধারণ প্রান্তবিন্দু A তে $\angle BAC$ উৎপন্ন করেছে। $\angle BAC$ কে সরল কোণ বলে। সরল কোণের পরিমাপ দুই সমকোণ বা 180°।

সন্নিহিত কোণ (Adjacent angle)

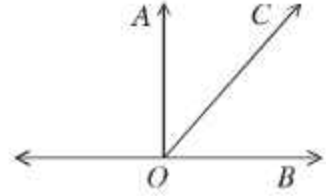
যদি সমতলে দুইটি কোণের একই শীর্ষবিন্দু হয় ও এদের একটি সাধারণ রশ্মি থাকে এবং কোণদ্বয় সাধারণ রশ্মির বিপরীত পাশে অবস্থান করে, তবে ঐ কোণদ্বয়কে সন্নিহিত কোণ বলে।
পাশের চিত্রে, A বিন্দুটি $\angle BAC$ ও $\angle CAD$ এর শীর্ষবিন্দু।
A বিন্দুতে $\angle BAC$ ও $\angle CAD$ উৎপন্নকারী রশ্মিগুলোর মধ্যে AC সাধারণ রশ্মি। কোণ দুইটি সাধারণ রশ্মি AC এর বিপরীত পাশে অবস্থিত। $\angle BAC$ এবং $\angle CAD$ পরস্পর সন্নিহিত কোণ।

লম্ব, সমকোণ (Right angle)

যদি একই রেখার উপর অবস্থিত দুইটি সন্নিহিত কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে কোণ দুইটির প্রত্যেকটি সমকোণ বা 90°। সমকোণের বাহু দুইটি পরস্পরের উপর লম্ব। পাশের চিত্রে, BD রেখার A বিন্দুতে AC রশ্মি দ্বারা $\angle BAC$ ও $\angle DAC$ দুইটি কোণ উৎপন্ন হয়েছে। A বিন্দু কোণ দুইটির শীর্ষবিন্দু।
$\angle BAC$ ও $\angle DAC$ উৎপন্নকারী বাহুগুলোর মধ্যে AC সাধারণ বাহু। কোণ দুইটি সাধারণ বাহু AC এর দুই পাশে অবস্থিত। $\angle BAC$ এবং $\angle DAC$ পরস্পর সমান হলে, এদের প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলে। AC ও BD বাহুদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ (Acute angle and obtuse angle)

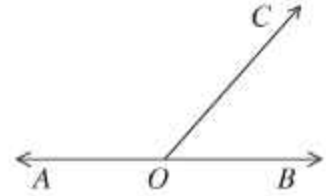
এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ এবং এক সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলা হয়। চিত্রে $\angle AOC$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\angle AOD$ স্থূলকোণ। এখানে $\angle AOB$ এক সমকোণ।

প্রবৃদ্ধ কোণ (Reflex angle)

দুই সমকোণ থেকে বড় কিন্তু চার সমকোণ থেকে ছোট কোণকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলা হয়। চিত্রে চিহ্নিত $\angle AOC$ প্রবৃদ্ধ কোণ।

পূরক কোণ (Complementary angle)

দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল এক সমকোণ হলে কোণ দুইটির একটি অপরটির পূরক কোণ।

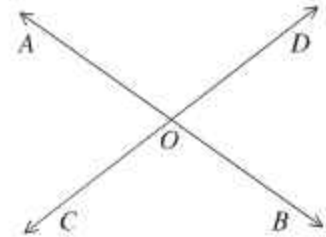
পাশের চিত্রে, $\angle AOB$ একটি সমকোণ। OC রশ্মি কোণটির বাহুদ্বয়ের অভ্যন্তরে অবস্থিত। এর ফলে $\angle AOC$ এবং $\angle COB$ এই দুইটি কোণ উৎপন্ন হলো। কোণ দুইটির পরিমাপের যোগফল $\angle AOB$ এর পরিমাপের সমান, অর্থাৎ এক সমকোণ। $\angle AOC$ এবং $\angle COB$ পরস্পর পূরক কোণ।

সম্পূরক কোণ (Supplementary angle)

দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল দুই সমকোণ হলে কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক কোণ।

পাশের চিত্রে, O, AB সরলরেখার অন্তঃস্থ একটি বিন্দু। OC একটি রশ্মি যা OA রশ্মি ও OB রশ্মি থেকে ভিন্ন। এর ফলে $\angle AOC$ এবং $\angle COB$ এই দুইটি কোণ উৎপন্ন হলো। কোণ দুইটির পরিমাপের যোগফল $\angle AOB$ কোণের পরিমাপের সমান, অর্থাৎ দুই সমকোণ, কেননা $\angle AOB$ একটি সরলকোণ। $\angle AOC$ এবং $\angle COB$ পরস্পর সম্পূরক কোণ।

বিপ্রতীপ কোণ (Vertical angle)

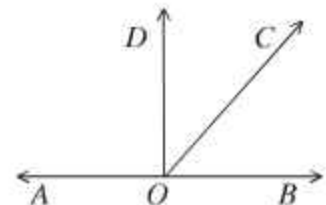
কোনো কোণের বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মিদ্বয় যে কোণ তৈরি করে তা ঐ কোণের বিপ্রতীপ কোণ।

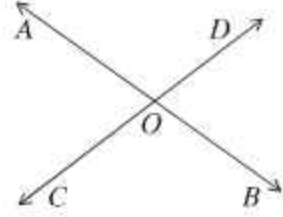
চিত্রে OA ও OB পরস্পর বিপরীত রশ্মি। আবার OC ও OD পরস্পর বিপরীত রশ্মি। $\angle BOD$ ও $\angle AOC$ পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ।

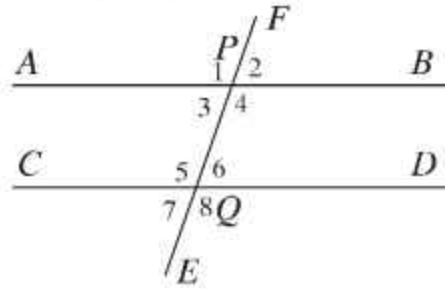
আবার $\angle BOC$ ও $\angle DOA$ একটি অপরটির বিপ্রতীপ কোণ। দুইটি সরলরেখা কোনো বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে, ছেদ বিন্দুতে দুই জোড়া বিপ্রতীপ কোণ উৎপন্ন হয়।

উপপাদ্য ১. একটি সরলরেখার একটি বিন্দুতে অপর একটি রশ্মি মিলিত হলে, যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় এদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

প্রমাণ: মনে করি, AB সরলরেখাটির O বিন্দুতে OC রশ্মির প্রান্তবিন্দু মিলিত হয়েছে। ফলে $\angle AOC$ ও $\angle COB$ দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হলো। AB রেখার উপর DO লম্ব আঁকি। সন্নিহিত কোণদ্বয়ের সমষ্টি

$= \angle AOC + \angle COB = \angle AOD + \angle DOC + \angle COB$

$= \angle AOD + \angle DOB = 2$ সমকোণ।

উপপাদ্য ২. দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে, উৎপন্ন বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান।

মনে করি, AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। ফলে O বিন্দুতে $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$, $\angle AOD$ কোণ উৎপন্ন হয়েছে।
$\angle AOC =$ বিপ্রতীপ $\angle BOD$ এবং $\angle COB =$ বিপ্রতীপ $\angle AOD$।

সমান্তরাল সরলরেখা (Parallel Straight Lines)

একান্তর কোণ, অনুরূপ কোণ, ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃস্থ কোণ
(Alternate angle, Corresponding angle, Co-interior angle)

উপরের চিত্রে, AB ও CD দুইটি সরলরেখা এবং EF সরলরেখা এদেরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখাদ্বয়ের ছেদক। ছেদকটি AB ও CD সরলরেখা দুইটির সাথে $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$, $\angle 8$ মোট আটটি কোণ তৈরি করেছে। এ কোণগুলোর মধ্যে

ক) $\angle 1$ এবং $\angle 5$, $\angle 2$ এবং $\angle 6$, $\angle 3$ এবং $\angle 7$, $\angle 4$ এবং $\angle 8$ পরস্পর অনুরূপ কোণ।

খ) $\angle 3$ এবং $\angle 6$, $\angle 4$ এবং $\angle 5$ হলো পরস্পর একান্তর কোণ।

গ) $\angle 4$, $\angle 6$ ডানপাশের অন্তঃস্থ কোণ।

ঘ) $\angle 3$, $\angle 5$ বামপাশের অন্তঃস্থ কোণ।

সমতলে দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করতে পারে অথবা তারা সমান্তরাল। সরলরেখাদ্বয় পরস্পরছেদী হয়, যদি উভয়রেখায় অবস্থিত একটি সাধারণ বিন্দু থাকে। অন্যথায় সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল। লক্ষণীয় যে, দুইটি ভিন্ন সরলরেখার সর্বাধিক একটি সাধারণ বিন্দু থাকতে পারে।

একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখার সমান্তরালতা নিম্নে বর্ণিত তিনভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়:

ক) সরলরেখা দুইটি কখনও পরস্পরকে ছেদ করে না (দুই দিকে অসীম পর্যন্ত বর্ধিত করা হলেও)।

খ) একটি সরলরেখার প্রতিটি বিন্দু অপরটি থেকে সমান ক্ষুদ্রতম দূরত্বে অবস্থান করে।

গ) সরলরেখা দুইটিকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে উৎপন্ন একান্তর কোণ বা অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়।

সংজ্ঞা ক অনুসারে একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখা একে অপরকে ছেদ না করলে সেগুলো সমান্তরাল। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা থেকে যেকোনো দুইটি রেখাংশ নিলে, রেখাংশ দুইটিও পরস্পর সমান্তরাল হয়।

সংজ্ঞা খ অনুসারে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটির যেকোনো বিন্দু থেকে অপরটির লম্ব-দূরত্ব সর্বদা সমান। লম্ব-দূরত্ব বলতে এদের একটির যেকোনো বিন্দু হতে অপরটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যকেই বুঝায়। আবার বিপরীতভাবে, দুইটি সরলরেখার একটির যেকোনো দুইটি বিন্দু থেকে অপরটির লম্ব-দূরত্ব পরস্পর সমান হলেও রেখাদ্বয় সমান্তরাল। এই লম্ব-দূরত্বকে দুইটি সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব বলা হয়।

সংজ্ঞা গ ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যের সমতুল্য। জ্যামিতিক প্রমাণ ও অঙ্কনের জন্য এ সংজ্ঞাটি অধিকতর উপযোগী।

লক্ষ করি, কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত নয় এরূপ বিন্দুর মধ্য দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল করে একটি মাত্র সরলরেখা আঁকা যায়।

ইউক্লিডের ৫ম স্বীকার্য (অঙ্কনের সাহায্যে প্রকাশ):

দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি ছেদক দ্বারা উৎপন্ন

ক) প্রত্যেক অনুরূপ কোণ জোড়া সমান হবে।

খ) প্রত্যেক একান্তর কোণ জোড়া সমান হবে।

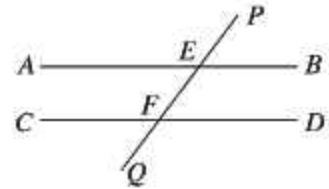
গ) ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক।

চিত্রে, $AB \parallel CD$ এবং PQ ছেদক এদের যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং,

ক) $\angle PEB =$ অনুরূপ $\angle EFD$ [সংজ্ঞানুসারে]

খ) $\angle AEF =$ একান্তর $\angle EFD$

গ) $\angle BEF + \angle EFD =$ দুই সমকোণ।

কাজ:

সমান্তরাল সরলরেখার বিকল্প সংজ্ঞার সাহায্যে সমান্তরাল সরলরেখা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ কর।

অনুশীলনী ৬.২

১. কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগের সংজ্ঞা দাও।

২. যদি একই সরলরেখাস্থ তিনটি ভিন্ন বিন্দু হয়, তবে চিত্রের উৎপন্ন কোণগুলোর নামকরণ কর।

৩. সন্নিহিত কোণের সংজ্ঞা দাও এবং এর বাহুগুলো চিহ্নিত কর।

৪. চিত্রসহ সংজ্ঞা দাও: বিপ্রতীপ কোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণ।

ত্রিভুজ (Triangle)

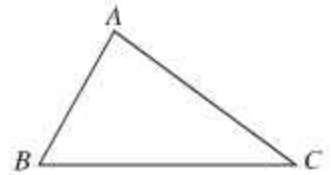
তিনটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র একটি ত্রিভুজ। রেখাংশগুলোকে ত্রিভুজের বাহু বলে। যেকোনো দুইটি বাহুর সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়। ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বাহু শীর্ষবিন্দুতে কোণ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ রয়েছে।

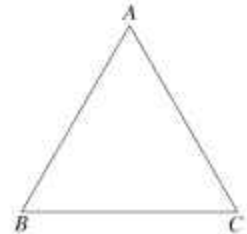
বাহুভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার: সমবাহু, সমদ্বিবাহু ও বিষমবাহু।

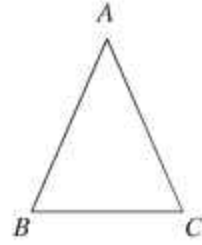
আবার কোণভেদেও ত্রিভুজ তিন প্রকার: সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী ও সমকোণী।

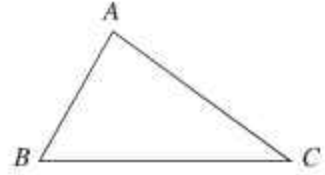
ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে পরিসীমা বলে। ত্রিভুজের বাহুগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে ত্রিভুজক্ষেত্র বলে।

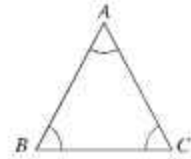
ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশকে মধ্যমা বলে। আবার, যেকোনো শীর্ষবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর লম্ব-দূরত্বই ত্রিভুজের উচ্চতা।

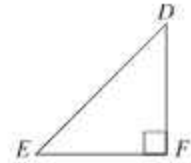
পাশের চিত্রে ABC একটি ত্রিভুজ। A, B, C এর তিনটি শীর্ষবিন্দু। AB, BC, CA এর তিনটি বাহু এবং $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ এর তিনটি কোণ। AB, BC, CA বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল ত্রিভুজটির পরিসীমা।

সমবাহু ত্রিভুজ (Equilateral triangle)

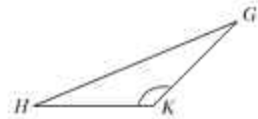
যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান তা সমবাহু ত্রিভুজ। পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজের $AB = BC = CA$। অর্থাৎ বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য সমান। ABC ত্রিভুজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (Isosceles triangle)

যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান তা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজের $AB = AC \neq BC$। অর্থাৎ দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান, যাদের কোনোটিই তৃতীয় বাহুর সমান নয়। ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

বিষমবাহু ত্রিভুজ (Scalene triangle)

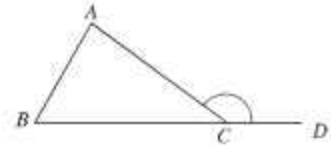
যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর অসমান তা বিষমবাহু ত্রিভুজ। পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য পরস্পর অসমান। ABC ত্রিভুজটি বিষমবাহু ত্রিভুজ।

সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ (Acute triangle)

যে ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ সূক্ষ্মকোণ, তা সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। ABC ত্রিভুজে $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ কোণ তিনটির প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। অর্থাৎ প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ 90° অপেক্ষা কম। $\triangle ABC$ একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।

সমকোণী ত্রিভুজ (Right triangle)

যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ, তা সমকোণী ত্রিভুজ। DEF ত্রিভুজে $\angle DFE$ সমকোণ, অপর কোণ দুইটি $\angle DEF$ ও $\angle EDF$ প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। $\triangle DEF$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

স্থূলকোণী ত্রিভুজ (Obtuse triangle)

যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ, তা স্থূলকোণী ত্রিভুজ। GHK ত্রিভুজে $\angle GKH$ একটি স্থূলকোণ, অপর কোণ দুইটি $\angle GHK$ ও $\angle HGK$ প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। $\triangle GHK$ একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ।

ত্রিভুজের বহিঃস্থ ও অন্তঃস্থ কোণ (Exterior angles and interior angles of a triangle)

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তা ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। এই কোণের সন্নিহিত কোণটি ছাড়া ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণকে এই বহিঃস্থ কোণের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ বলে।

পাশের চিত্রে, $\triangle ABC$ এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে। $\angle ACD$ ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। $\angle ABC$, $\angle BAC$ ও $\angle ACB$ ত্রিভুজটির তিনটি অন্তঃস্থ কোণ। $\angle ACB$ কে $\angle ACD$ এর প্রেক্ষিতে সন্নিহিত অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়। $\angle ABC$ ও $\angle BAC$ এর প্রত্যেককে $\angle ACD$ এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়।

উপপাদ্য ৪. ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB =$ দুই সমকোণ।

C বিন্দু দিয়ে CE আঁকি যাতে $AB \parallel CE$ হয়। এবার $\angle ABC = \angle ECD$ [অনুরূপ কোণ বলে] এবং $\angle BAC = \angle ACE$ [একান্তর কোণ বলে]

$\therefore \angle ABC + \angle BAC = \angle ECD + \angle ACE = \angle ACD$

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle ACD + \angle ACB =$ দুই সমকোণ

অনুসিদ্ধান্ত ২. ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

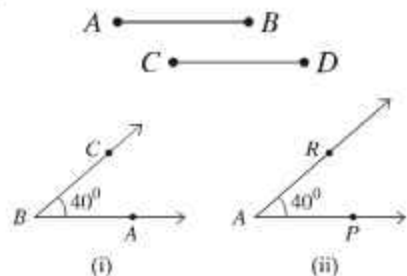
অনুসিদ্ধান্ত ৩. ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

অনুসিদ্ধান্ত ৪. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় পরস্পর পূরক।

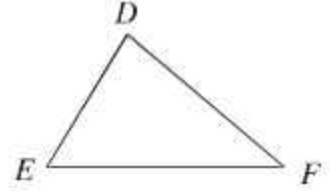
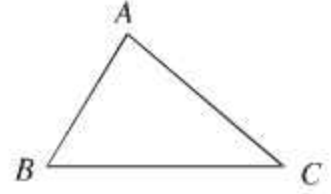
কাজ: প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

বাহু ও কোণের সর্বসমতা (Congruence of sides and angles)

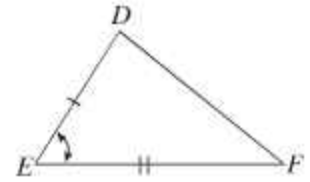
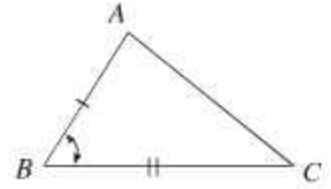
দুইটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান হলে রেখাংশ দুইটি সর্বসম। আবার বিপরীতভাবে, দুইটি রেখাংশ সর্বসম হলে এদের দৈর্ঘ্য সমান।

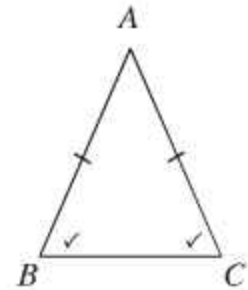
দুইটি কোণের পরিমাপ সমান হলে কোণ দুইটি সর্বসম। আবার বিপরীতভাবে, দুইটি কোণ সর্বসম হলে এদের পরিমাপও সমান।

ত্রিভুজের সর্বসমতা (Congruence of triangles)

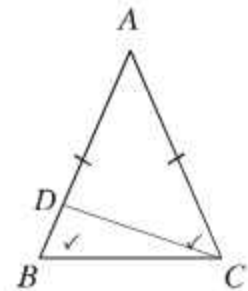
একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে মিলে যায়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়। সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলো সমান।

পাশের চিত্রে $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম। $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম হলে এবং A, B, C শীর্ষ যথাক্রমে D, E, F শীর্ষের উপর পতিত হলে $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$ এবং $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ হবে। $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম বোঝাতে $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ লেখা হয়।

উপপাদ্য ৫. (বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

মনে করি, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এ $AB = DE$, $BC = EF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle DEF$।
তাহলে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$।

উপপাদ্য ৬. যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

মনে করি, ABC ত্রিভুজে $AB = AC$।
তাহলে, $\angle ABC = \angle ACB$।

উপপাদ্য ৭. যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত বাহু দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজে $\angle ABC = \angle ACB$।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = AC$।

প্রমাণ:

ধাপ ১. যদি $AB \neq AC$ হয়, তবে (i) $AB > AC$ অথবা (i) $AB < AC$ হবে।

মনে করি, (i) $AB > AC$। AB থেকে AC এর সমান AD কেটে নিই। এখন, ADC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। সুতরাং,

$\angle ADC = \angle ACD$ [$\because$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় সমান]

$\triangle DBC$ এর বহিঃস্থ কোণ $\angle ADC > \angle ABC$ [$\because$ বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর]

$\therefore \angle ACD > \angle ABC$। সুতরাং, $\angle ACB > \angle ABC$, কিন্তু তা প্রদত্ত শর্তবিরোধী।

ধাপ ২. অনুরূপভাবে, (ii) $AB < AC$ হলে দেখানো যায় যে

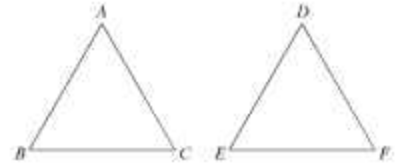
$\angle ABC > \angle ACB$, কিন্তু তাও প্রদত্ত শর্তবিরোধী।

ধাপ ৩. সুতরাং, $AB > AC$ অথবা $AB < AC$ হতে পারে না।

$\therefore AB = AC$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৮. (বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য)

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

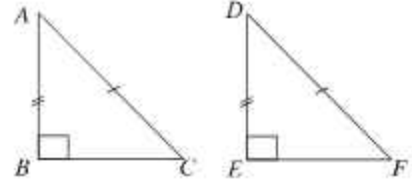
মনে করি, $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ এ
$AB = DE$, $AC = DF$ এবং $BC = EF$
তাহলে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$।

উপপাদ্য ৯. (কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য)

যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও এদের সংলগ্ন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

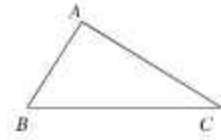
মনে করি, $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$-এ $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ এবং কোণদ্বয়ের সংলগ্ন BC বাহু = অনুরূপ EF বাহু। তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম, অর্থাৎ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$।

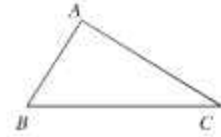
উপপাদ্য ১০. (অতিভুজ-বাহু উপপাদ্য)

দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় সমান হলে এবং একটির এক বাহু অপরটির অপর এক বাহুর সমান হলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ AC = অতিভুজ DF এবং $AB = DE$। তাহলে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

ত্রিভুজের বাহু ও কোণের মধ্যে সম্পর্ক রয়েছে। এ সম্পর্ক নিচের উপপাদ্য ১২ ও উপপাদ্য ১৩ এর প্রতিপাদ্য বিষয়।

উপপাদ্য ১১. কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে করি, $\triangle ABC$ এ $AC > AB$। সুতরাং $\angle ABC > \angle ACB$

উপপাদ্য ১২. কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, $\triangle ABC$ এর $\angle ABC > \angle ACB$।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC > AB$

প্রমাণ:

ধাপ ১. যদি AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তবে (i) $AC = AB$ অথবা (ii) $AC < AB$ হবে।

(i) যদি $AC = AB$ হয়, তবে $\angle ABC = \angle ACB$ [$\because$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণদ্বয় সমান]

কিন্তু শর্তানুযায়ী $\angle ABC > \angle ACB$, তা প্রদত্ত শর্তবিরোধী।

(ii) আবার, যদি $AC < AB$ হয়, তবে $\angle ABC < \angle ACB$ হবে। [$\because$ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর]

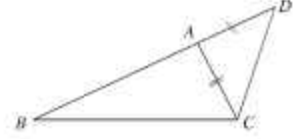
কিন্তু তাও প্রদত্ত শর্তবিরোধী।

ধাপ ২. সুতরাং, AC বাহু AB এর সমান বা AB থেকে ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

$\therefore AC > AB$ (প্রমাণিত)।

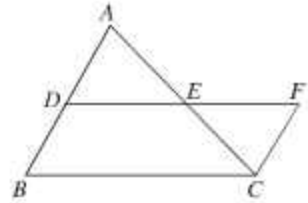
ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি বা অন্তরের সাথে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের সম্পর্ক রয়েছে।

উপপাদ্য ১৩. ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। ধরি, BC ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু। তাহলে, $AB + AC > BC$।

অনুসিদ্ধান্ত ৫. ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। $\triangle ABC$ এর যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। তাহলে, $AB - AC < BC$।

উপপাদ্য ১৪. ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। D ও E যথাক্রমে ত্রিভুজটির AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু। তাহলে, প্রমাণ করতে হবে যে $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$।

অঙ্কন: D ও E যোগ করে বর্ধিত করি যেন $EF = DE$ হয়। C, F যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle ADE$ ও $\triangle CEF$ এর মধ্যে, $AE = EC$ [দেওয়া আছে]

$DE = EF$ [অঙ্কনানুসারে]

অন্তর্ভূক্ত $\angle AED =$ অন্তর্ভূক্ত $\angle CEF$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CEF$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle ADE = \angle EFC$ [একান্তর কোণ]

$\therefore AD \parallel CF$

আবার, $BD = AD = CF$ এবং $BD \parallel CF$।

সুতরাং $BDFC$ একটি সামান্তরিক।

$\therefore DF \parallel BC$ বা $DE \parallel BC$।

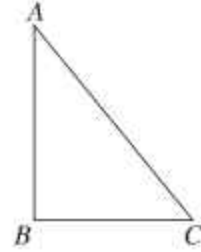
ধাপ ২. আবার, $DF = BC$ বা $DE + EF = BC$

বা $DE + DE = BC$ বা $2DE = BC$ বা $DE = \frac{1}{2}BC$

$\therefore DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$ (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ১৫. পিথাগোরাসের উপপাদ্য (Pythagorean Theorem)

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

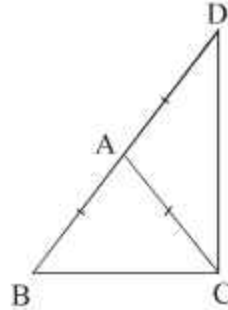
মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC$ সমকোণ এবং AC অতিভুজ। তাহলে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

উদাহরণ ১. $\triangle ABC$ এর $AB = AC$, BA কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হলো যেন $AD = AC$ হয়। C, D যোগ করা হলো।

ক) উদ্দীপকের ভিত্তিতে চিত্র আঁক।

খ) প্রমাণ কর যে, $BC + CD > 2AC$

গ) প্রমাণ কর যে, $\angle BCD =$ এক সমকোণ।

সমাধান:

ক)

খ) দেওয়া আছে $AB = AC$ এবং অঙ্কন অনুসারে $AC = AD$

$\triangle BCD$ এ

$BC + CD > BD$ [ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $BC + CD > AB + AD$

বা, $BC + CD > AD + AD$

বা $BC + CD > 2AD$

$\therefore\ BC + CD > 2AC \quad [\because AB = AC = AD]$

গ) দেওয়া আছে $AB = AC$ সুতরাং $\angle ABC = \angle ACB$

অর্থাৎ $\angle DBC = \angle ACB$

অঙ্কন অনুসারে $AC = AD$ সুতরাং $\angle ADC = \angle ACD$

অর্থাৎ $\angle BDC = \angle ACD$

$\triangle BCD$ এ

$\angle BDC + \angle DBC + \angle BCD =$ দুই সমকোণ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান]

বা, $\angle ACD + \angle ACB + \angle BCD =$ দুই সমকোণ

বা $\angle BCD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ

বা, $2\angle BCD =$ দুই সমকোণ।

$\therefore \angle BCD =$ এক সমকোণ।

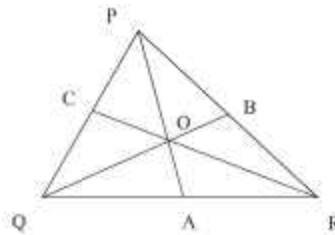
উদাহরণ ২. PQR একটি ত্রিভুজ। PA, QB ও RC তিনটি মধ্যমা O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক) প্রদত্ত তথ্যের আলোকে চিত্র আঁক।

খ) প্রমাণ কর যে, $PQ + PR > QO + RO$

গ) প্রমাণ কর যে, $PA + QB + RC < PQ + QR + PR$

সমাধান:

ক)

খ) চিত্র 'ক' থেকে প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ + PR > QO + RO$

প্রমাণ: ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তার ৩য় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\triangle PQB$ এ $PQ + PB > QB$

আবার $\triangle BOR$ এ $BR + BO > RO$

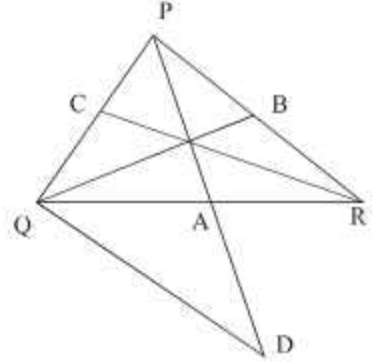
$\therefore PQ + PB + BR + BO > QB + RO$

বা, $PQ + PR + BO > QO + OB + RO$

$\therefore PQ + PR > QO + RO$

গ) **অঙ্কন:** PA কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $PA = AD$ হয়। $Q, \ D$ যোগ করি।

প্রমাণ:

$\triangle QAD$ এবং $\triangle PAR$ এ
$QA = AR, \ AD = PA$
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle QAD =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle PAR$
$\therefore \triangle QAD \cong \triangle PAR$ এবং $QD = PR$
এখন, $\triangle PQD$ এ $PQ + QD > PD$
বা, $PQ + PR > 2PA$ [$\because A, \ PD$ এর মধ্যবিন্দু]

একইভাবে, $PQ + QR > 2QB$ এবং $PR + QR > 2RC$

$\therefore PQ + PR + PQ + QR + PR + QR > 2PA + 2QB + 2RC$

বা, $2PQ + 2QR + 2PR > 2PA + 2QB + 2RC$

বা, $PQ + QR + PR > PA + QB + RC$

$\therefore PA + QB + RC < PQ + QR + PR$

অনুশীলনী ৬.৩

১. নিচে তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া হলো। কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব (সংখ্যাগুলো দৈর্ঘ্যের এককে)?

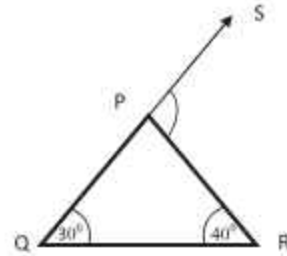
ক) 5, 6, 7 খ) 5, 7, 14
গ) 3, 4, 7 ঘ) 2, 4, 8

২. সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণদ্বয়ের বিয়োগফল কত?

ক) $0°$ খ) $120°$ গ) $180°$ ঘ) $240°$

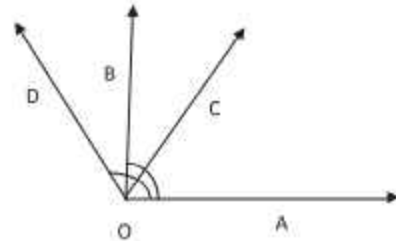
৩. চিত্রে $\angle RPS$ এর মান কত?

ক) 40° খ) 70°

গ) 90° ঘ) 110°

৪. পাশের চিত্রে–

(i) $\angle AOC$ একটি সূক্ষ্মকোণ

(ii) $\angle AOB$ একটি সমকোণ

(iii) $\angle AOD$ একটি প্রবৃদ্ধকোণ

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii গ) i ও ii ঘ) ii ও iii

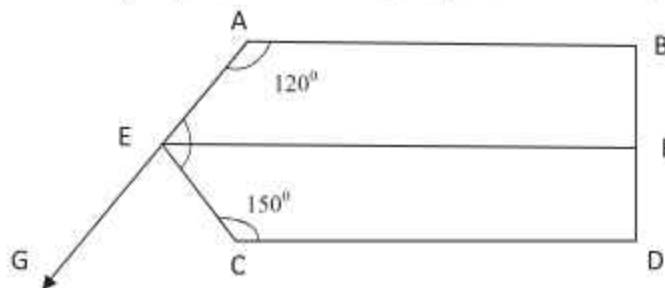
৫. একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে মিলে যায় তবে–

(i) ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম

(ii) ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু সমান

(iii) অনুরূপ কোণ সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

উপরের চিত্রে $AB \parallel EF \parallel CD$ এবং $BD \perp CD$। প্রদত্ত চিত্রের আলোকে (৬-৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৬. $\angle AEF$ এর মান কত?

ক) 30° খ) 60° গ) 240° ঘ) 270°

৭. $\angle BFE$ এর মান নিচের কোনটি?

ক) 30° খ) 60° গ) 90° ঘ) 120°

৮. $\angle CEF + \angle CEG =$ কত?

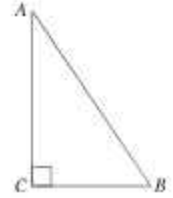
ক) 60° খ) 120° গ) 180° ঘ) 210°

৯. প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।

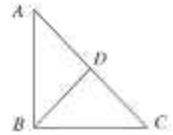
১০. প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

১১. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

১২. $\triangle ABC$ এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$

১৩. চিত্রে, দেওয়া আছে, $\angle C =$ এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$। প্রমাণ কর যে, $AB = 2BC$

১৪. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

১৫. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১৬. চিত্রে, ABC ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BD = \frac{1}{2}AC$

১৭. $\triangle ABC$ এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

১৮. প্রমাণ কর যে, কোনো রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু উক্ত রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

১৯. ABC ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ। BC বাহুর মধ্যবিন্দু D।

ক) প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ) দেখাও যে, $AB + AC > 2AD$

গ) প্রমাণ কর যে, $AD = \frac{1}{2}BC$

২০. $\triangle ABC$ এর D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু এবং $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

ক) উদ্দীপকের তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর

খ) প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

গ) প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$

২১. প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমির উপর লম্ব।

২২. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

২৩. এক পরিশ্রমী পিতা তার একমাত্র পুত্রকে ডেকে বললেন যে তিনি তার উপার্জিত অর্থ দিয়ে স্বর্ণ ক্রয় করে পার্শ্ববর্তী বনে লুকিয়ে রেখেছেন। স্বর্ণের অবস্থান সম্পর্কে পুত্র জিজ্ঞাসা করাতে তিনি জানালেন যে বনে একই রকম দেখতে দুইটি বৃক্ষ A ও B এবং একটি পাথর S রয়েছে। S থেকে A তে পৌছে সমদূরত্ব লম্বালম্বিভাবে গিয়ে সে C বিন্দু পাবে। এবার আবার S থেকে B তে এসে একইভাবে লম্বালম্বি সমদূরত্ব অতিক্রম করে D বিন্দু পাবে। এবার CD রেখার মধ্যবিন্দুতে স্বর্ণ পাওয়া যাবে। পুত্র বৃক্ষ A ও B পেলেও দুর্ভাগ্যজনকভাবে S পেল না। সে কি স্বর্ণ খুঁজে পাবে? কীভাবে?

অধ্যায় ৭

ব্যাবহারিক জ্যামিতি (Practical Geometry)

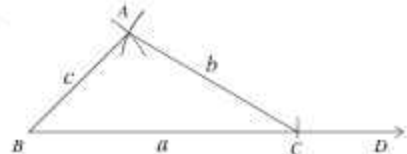
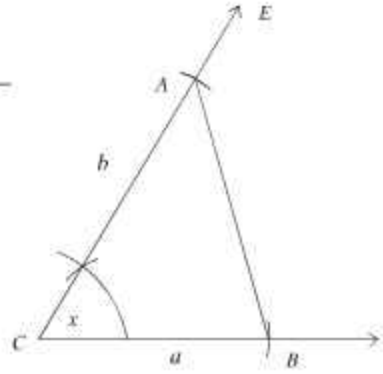
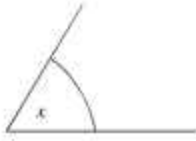
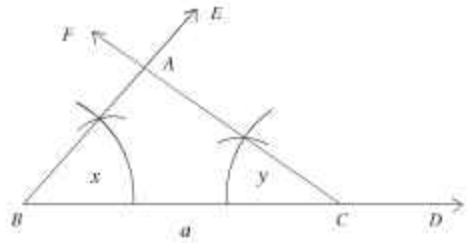
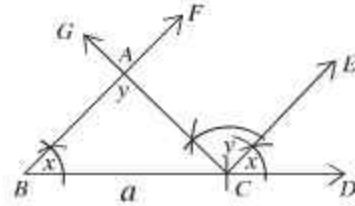
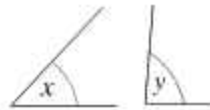
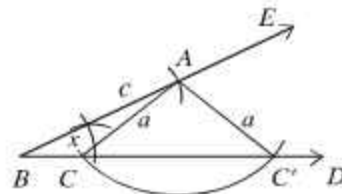
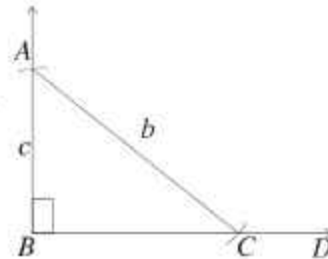
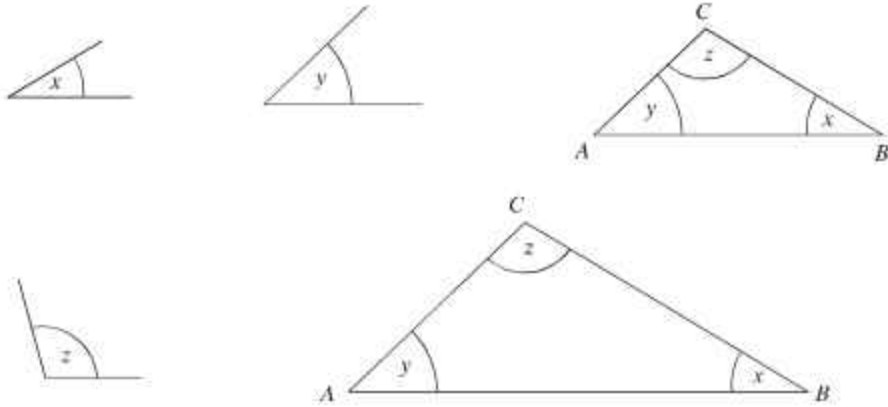
পূর্বের শ্রেণিতে জ্যামিতির বিভিন্ন উপপাদ্য প্রমাণে ও অনুশীলনীতে চিত্র অঙ্কনের প্রয়োজন ছিল। সে সব চিত্র সূক্ষ্মভাবে অঙ্কন না করলে চলতো। কিন্তু কখনো কখনো জ্যামিতিক চিত্র সূক্ষ্মভাবে অঙ্কনের প্রয়োজন হয়। যেমন, একজন স্থপতি যখন কোনো বাড়ির নকশা করেন কিংবা প্রকৌশলী যখন যন্ত্রের বিভিন্ন অংশের চিত্র আঁকেন। এ ধরনের জ্যামিতিক অঙ্কনে শুধু স্কেল ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্য নেওয়া হয়। এর আগে আমরা স্কেল ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ আঁকতে শিখেছি। এ অধ্যায়ে বিশেষ ধরনের ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ অঙ্কনের আলোচনা করা হবে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- চিত্রের সাহায্যে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে ত্রিভুজ অঙ্কন করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে চতুর্ভুজ, সামান্তরিক, ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করতে পারবে।

ত্রিভুজ অঙ্কন

প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ রয়েছে। তবে কোনো ত্রিভুজের আকার ও আকৃতি নির্দিষ্ট করার জন্য সবগুলো বাহু ও কোণের প্রয়োজন হয় না। যেমন, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বলে এর যেকোনো দুইটি কোণের মান দেওয়া থাকলে তৃতীয় কোণটির মান বের করা যায়। আবার, ত্রিভুজের সর্বসমতা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো থেকে দেখা যায় যে, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ অর্থাৎ ছয়টির মধ্যে কেবলমাত্র নিম্নলিখিত তিনটি অপর এক ত্রিভুজের অনুরূপ তিনটি অংশের সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়। অর্থাৎ, এ তিনটি অংশ দ্বারা নির্দিষ্ট আকারের অনন্য ত্রিভুজ আঁকা যায়। সপ্তম শ্রেণিতে আমরা নিম্নবর্ণিত উপাত্ত থেকে ত্রিভুজ আঁকতে শিখেছি।

১. তিনটি বাহু

লক্ষণীয় যে, উপরের প্রত্যেক ক্ষেত্রে ত্রিভুজের তিনটি অংশ নির্দিষ্ট করা হয়েছে। কিন্তু যেকোনো তিনটি অংশ নির্দিষ্ট করলেই ত্রিভুজটি নির্দিষ্ট হয় না। যেমন, ত্রিভুজের তিনটি কোণ দেওয়া থাকলে বিভিন্ন আকারের অসংখ্য ত্রিভুজ আঁকা যায় (যাদের সদৃশ ত্রিভুজ বলা হয়)।

অনেক সময় ত্রিভুজ আঁকার জন্য এমন তিনটি উপাত্ত দেওয়া থাকে, যাদের সাহায্যে বিভিন্ন অঙ্কনের মাধ্যমে ত্রিভুজটি নির্ধারণ করা যায়। এরূপ কয়েকটি সম্পাদ্য নিচে বর্ণনা করা হলো।

সম্পাদ্য ১. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

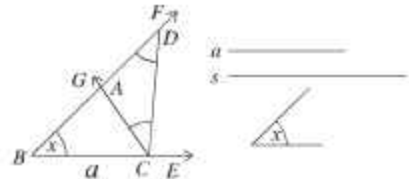
মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন:

১. যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি।

২. BF রশ্মি থেকে s এর সমান BD অংশ কাটি।

৩. C, D যোগ করি। C বিন্দুতে DC রেখাংশের যে পাশে B বিন্দু আছে সেই পাশে $\angle BDC$ এর সমান $\angle DCG$ আঁকি।

৪. CG রশ্মি BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\triangle ACD$ এ $\angle ADC = \angle ACD$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore AC = AD$

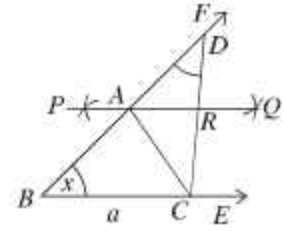
এখন, $\triangle ABC$ এ $\angle ABC = \angle x, BC = a$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং $BA + AC = BA + AD = BD = s$।

অতএব, $\triangle ABC$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

বিকল্প পদ্ধতি: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন:

১. যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি।
২. BF রশ্মি থেকে s এর সমান BD অংশ কাটি।
৩. C, D যোগ করি। CD এর লম্বদ্বিখণ্ডক PQ আঁকি।
৪. PQ রশ্মি BD রশ্মিকে A এবং CD কে R বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করি।

তাহলে, $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\triangle ACR$ এবং $\triangle ADR$ এ $CR = DR$, $AR = AR$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ARC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle ARD$ [সমকোণ]

$\triangle ACR \cong \triangle ADR$।

$\therefore AC = AD$

এখন, $\triangle ABC$ এ $\angle ABC = \angle x, BC = a$ [অঙ্কন অনুসারে]

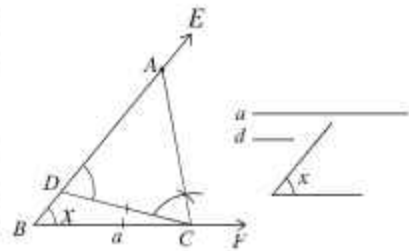
এবং $BA + AC = BA + AD = BD = s$।

অতএব, $\triangle ABC$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ২. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন:

১. যেকোনো একটি রশ্মি BF থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBE$ আঁকি।
২. BE রশ্মি থেকে d এর সমান BD অংশ কেটে নিই।
৩. C, D যোগ করি। DC রেখাংশের যে পাশে E বিন্দু আছে সেই পাশে C বিন্দুতে $\angle EDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি।

CA রশ্মি BE রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, $\triangle ACD$ এ $\angle ACD = \angle ADC$

$\therefore AD = AC$

সুতরাং দুই বাহুর অন্তর, $AB - AC = AB - AD = BD = d$

এখন, $\triangle ABC$ এ $BC = a$, $AB - AC = d$ এবং $\angle ABC = \angle x$

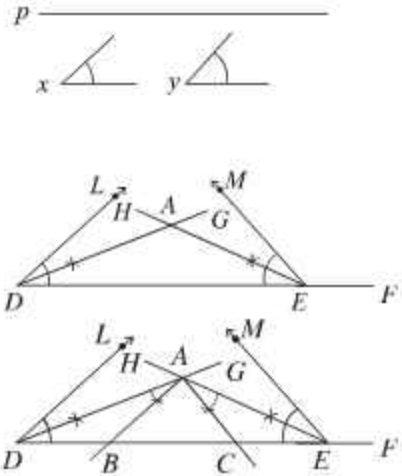
সুতরাং, $\triangle ABC$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

> **কাজ:**
>
> ক) প্রদত্ত কোণ সূক্ষ্মকোণ না হলে, উপরের পদ্ধতিতে অঙ্কন করা সম্ভব নয়। কেন? এ ক্ষেত্রে ত্রিভুজটি আঁকার কোনো উপায় বের কর।
>
> খ) ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। বিকল্প পদ্ধতিতে ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

সম্পাদ্য ৩. ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি ত্রিভুজের পরিসীমা p এবং ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x$ ও $\angle y$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন:

১. যেকোনো একটি রশ্মি DF থেকে পরিসীমা p এর সমান করে DE অংশ কেটে নিই। D ও E বিন্দুতে DE রেখাংশের একই পাশে $\angle x$ এর সমান $\angle EDL$ এবং $\angle y$ এর সমান $\angle DEM$ আঁকি।
২. কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডক DG ও EH আঁকি।
৩. মনে করি, DG ও EH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি।
৪. AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\triangle ABD$ এ $\angle ADB = \angle DAB$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore AB = DB$

আবার, $\triangle ACE$ এ $\angle AEC = \angle EAC$

$\therefore CA = CE$

সুতরাং $\triangle ABC$ এ $AB + BC + CA = DB + BC + CE = DE = p$

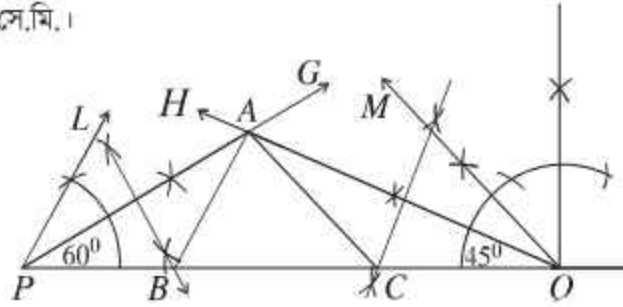
২০২৫

$$\angle ABC = \angle ADB + \angle DAB = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$$

এবং $\angle ACB = \angle AEC + \angle EAC = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle y = \angle y$

সুতরাং $\triangle ABC$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

> **কাজ:**
>
> ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি সূক্ষকোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে। বিকল্প পদ্ধতিতে ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

উদাহরণ ১. একটি ত্রিভুজ ABC আঁক, যার $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ এবং পরিসীমা $AB + BC + CA = 11$ সে.মি.।

অঙ্কন: নিচের ধাপসমূহ অনুসরণ করি:

১. রেখাংশ $PQ = 11$ সে.মি. আঁকি।

২. PQ রেখাংশের একই পাশে P এবং Q বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle QPL = 60^\circ$ ও $\angle PQM = 45^\circ$ কোণ আঁকি।

৩. কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডক PG ও QH আঁকি। মনে করি, PG ও QH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

৪. PA, QA রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক আঁকি যা PQ রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

৫. A, B এবং A, C যোগ করি।

তাহলে, $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

কাজ:

সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহু এবং অতিভুজ ও অপর বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

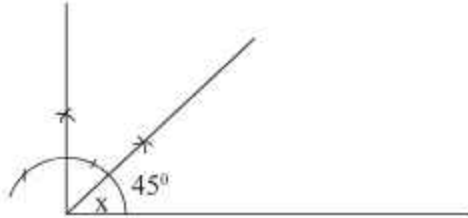
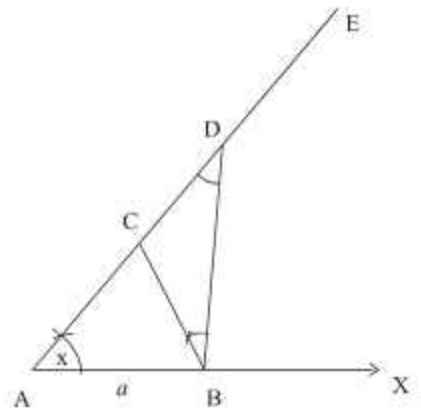
উদাহরণ ২. একটি ত্রিভুজের ভূমি $a = 3$ সে.মি., ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ 45° এবং অপর বাহু দুইটির সমষ্টি $s = 6$ সে.মি.।

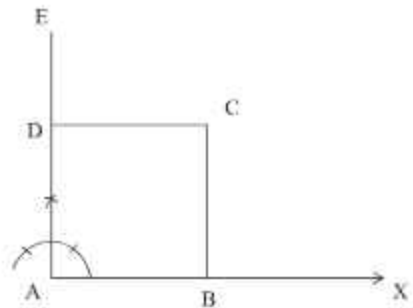
ক) উদ্দীপকের তথ্যগুলো চিত্রে প্রকাশ কর।

খ) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

গ) একটি বর্গের পরিসীমা $2s$ হলে বর্গটি আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

সমাধান:

ক)

খ) AX যেকোনো রশ্মি থেকে $AB = a$ কাটি। A বিন্দুতে $\angle XAE = x$ আঁকি, AE থেকে $AD = s$ নেই। B, D যোগ করি। এবার B বিন্দুতে $\angle ADB$ এর সমান করে $\angle DBC$ আঁকি। BC রেখাংশ AD কে C বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore ABC$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ) মনে করি, একটি বর্গের পরিসীমা $p = 2s$ দেওয়া আছে, বর্গটি অঙ্কন করতে হবে।

AX যেকোনো রশ্মি থেকে $AB = \frac{1}{4}p$ কেটে নেই। A বিন্দুতে $AE \perp AB$ আঁকি। AE থেকে $AD = AB$ কাটি।
এবার B ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\frac{1}{4}p$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle BAD$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে। B, C এবং C, D যোগ করি।
$\therefore ABCD$ উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

অনুশীলনী ৭.১

১. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর:

ক) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.8 সে.মি.।

খ) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 3 সে.মি. এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°।

গ) দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং এদের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

ঘ) দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং 45° কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

ঙ) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4.5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ 30°।

চ) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 4 সে.মি.।

২. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর:

ক) ভূমি 3.5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 60° ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি 8 সে.মি.।

খ) ভূমি 5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 45° ও অপর দুই বাহুর অন্তর 1 সে.মি.।

গ) ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রমে 60° ও 45° ও পরিসীমা 12 সে.মি.।

৩. একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ এবং শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৪. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৫. ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৬. সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৭. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি স্থূলকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

চতুর্ভুজ অঙ্কন

আমরা দেখেছি যে, ত্রিভুজের তিনটি উপাত্ত দেওয়া থাকলে অনেক ক্ষেত্রেই ত্রিভুজটি নির্দিষ্টভাবে আঁকা সম্ভব। কিন্তু চতুর্ভুজের চারটি বাহু দেওয়া থাকলেই একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকা যায় না। নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকার জন্য পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্ত প্রয়োজন হয়। নিম্নে বর্ণিত পাঁচটি উপাত্ত জানা থাকলে, নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকা যায়।

১. চারটি বাহু ও একটি কোণ

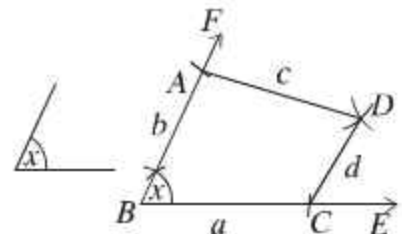
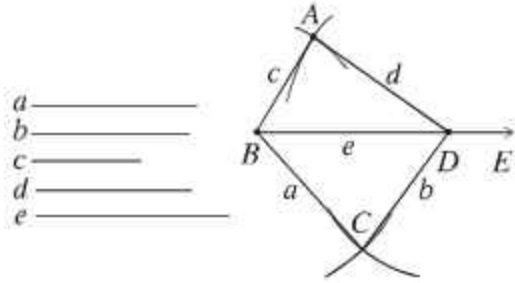
২. চারটি বাহু ও একটি কর্ণ

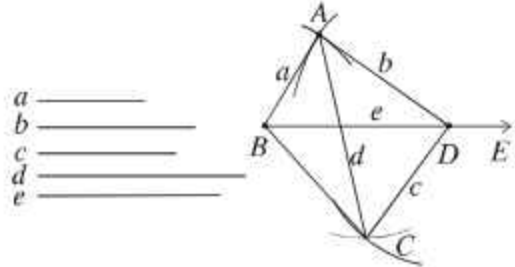
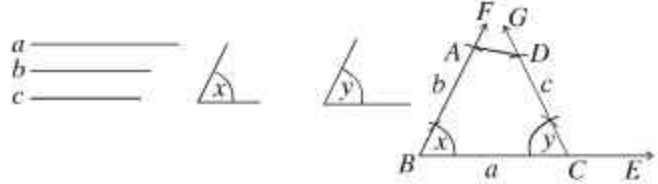
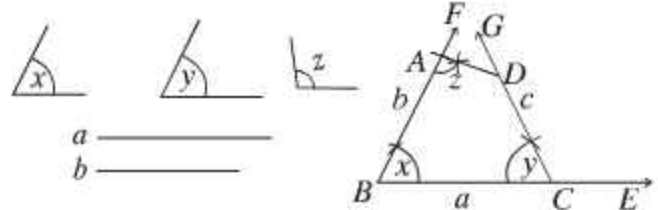
৩. তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ

৪. তিনটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

৫. দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ।

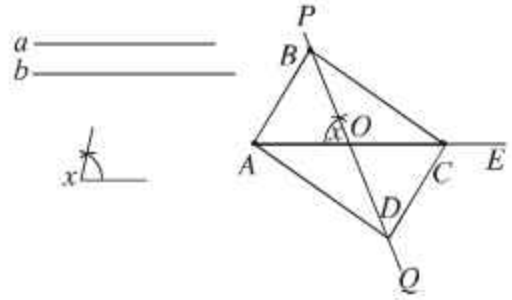
অষ্টম শ্রেণিতে উল্লেখিত উপাত্ত দিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। অঙ্কনের কৌশল লক্ষ করে দেখা যায় কিছু ক্ষেত্রে সরাসরি চতুর্ভুজ আঁকা হয়। আবার কিছু ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কনের মাধ্যমে চতুর্ভুজ আঁকা হয়। যেহেতু কর্ণ চতুর্ভুজকে দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে, সেহেতু উপাত্ত হিসাবে একটি বা দুইটি কর্ণ প্রদত্ত হলে ত্রিভুজ অঙ্কনের মাধ্যমে চতুর্ভুজ আঁকা সম্ভব হয়।

১. চারটি বাহু ও একটি কোণ

২. চারটি বাহু ও একটি কর্ণ

৩. তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ

৪. তিনটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

৫. দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ।

বিশেষ ধরনের চতুর্ভুজ অঙ্কনের জন্য অনেক সময় এমন উপাত্ত দেওয়া থাকে যা থেকে নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকার জন্য প্রয়োজনীয় পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্ত পাওয়া যায়। তাহলে ঐ উপাত্তের সাহায্যেও চতুর্ভুজটি আঁকা যায়। যেমন, সামান্তরিকের দুইটি সংলগ্ন বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি দেওয়া থাকলে সামান্তরিকটি আঁকা যায়। এখানে তিনটি মাত্র উপাত্ত দেওয়া আছে। আবার বর্গের মাত্র একটি বাহু দেওয়া থাকলেই বর্গটি আঁকা যায়। কারণ, তাতে পাঁচটি উপাত্ত, যথা: বর্গের চার সমান বাহু ও এক কোণ (সমকোণ) নির্দিষ্ট হয়।

সম্পাদ্য ৪. সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও এদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

মনে করি, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি a ও b এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি AE থেকে a এর সমান AC রেখাংশ নিই। AC এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি। O বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle AOP$ আঁকি। OP এর বিপরীত রশ্মি OQ অঙ্কন করি। OP ও OQ রশ্মিদ্বয় থেকে $\frac{1}{2}b$ এর সমান যথাক্রমে OB ও OD রেখাংশদ্বয় নিই। $A, B; A, D; C, B$ ও C, D যোগ করি।

তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ এ $OA = OC = \frac{1}{2}a$, $OB = OD = \frac{1}{2}b$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]

অতএব, $\triangle AOB \cong \triangle COD$

সুতরাং, $AB = CD$ এবং $\angle ABO = \angle CDO$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

$\therefore AB$ ও CD সমান ও সমান্তরাল।

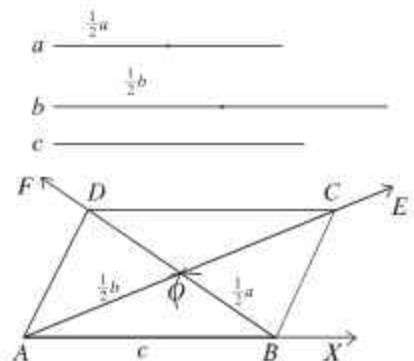
অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং, $ABCD$ একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় $AC = AO + OC = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$ ও $BD = BO + OD = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$ এবং কর্ণ দুইটির অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB = \angle x$

অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ৫. সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও একটি বাহু দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

মনে করি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ a ও b এবং একটি বাহু c দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: a ও b কর্ণদ্বয়কে সমান দুইভাগে বিভক্ত করি। যেকোনো রশ্মি AX থেকে c এর সমান AB নিই। A ও B কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে $\frac{a}{2}$ ও $\frac{b}{2}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O ও B, O যোগ করি। AO কে AE বরাবর এবং BO কে BF বরাবর বর্ধিত করি। OE থেকে $\frac{a}{2} = OC$ এবং OF থেকে $\frac{b}{2} = OD$ নিই। $A, D; D, C$ ও B, C যোগ করি।

তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ এ

$OA = OC = \dfrac{a}{2}; OB = OD = \dfrac{b}{2}$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$।

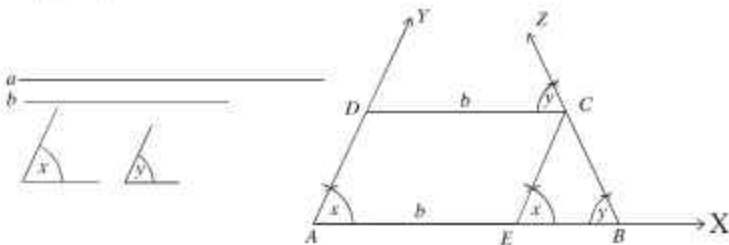
$\therefore AB = CD$ এবং $\angle ABO = \angle ODC$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

AB ও CD সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।

অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

উদাহরণ ৩. ট্রাপিজিয়ামের দুইটি সমান্তরাল বাহু এবং এদের মধ্যে বৃহত্তর বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ দেওয়া আছে। ট্রাপিজিয়ামটি আঁক।

মনে করি, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় a এবং b, যেখানে $a > b$ এবং বৃহত্তর বাহু a সংলগ্ন কোণদ্বয় $\angle x$ ও $\angle y$। ট্রাপিজিয়ামটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি AX থেকে $AB = a$ নিই। AB রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle BAY$ এবং B বিন্দুতে $\angle y$ এর সমান $\angle ABZ$ আঁকি।

এবার AB রেখাংশ থেকে $AE = b$ কেটে নিই। E বিন্দুতে $EC \parallel AY$ আঁকি যা BZ রশ্মিতে C বিন্দুতে ছেদ করে। এবার $CD \parallel BA$ আঁকি। CD রেখাংশ AY রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট ট্রাপিজিয়াম।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, $AE \parallel CD$ এবং $AD \parallel EC$ সুতরাং $AECD$ একটি সামান্তরিক এবং $CD = AE = b$।

এখন, চতুর্ভুজ $ABCD$ এ $AB = a$, $CD = b$, $AB \parallel CD$ এবং $\angle BAD = \angle x$, $\angle ABC = \angle y$ [অঙ্কন অনুসারে]

অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় ট্রাপিজিয়াম।

> **কাজ:** রম্বসের পরিসীমা ও একটি কোণ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

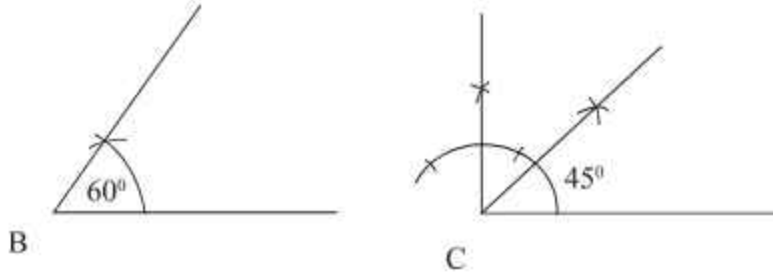
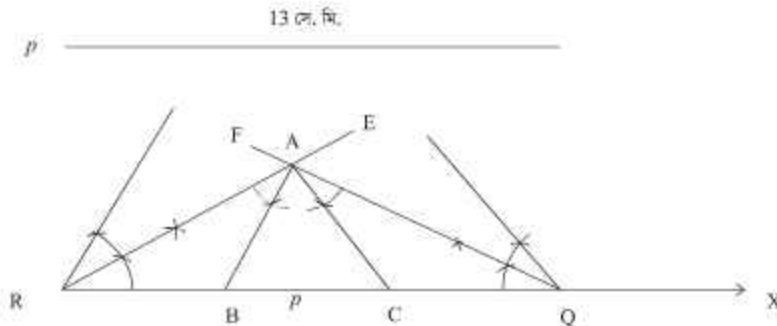
উদাহরণ ৪. ABC ত্রিভুজের $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ এবং পরিসীমা $p = 13$ সে.মি.।

ক) স্কেল ও কম্পাস দিয়ে $\angle B$ ও $\angle C$ আঁক।

খ) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

গ) একটি রম্বস আঁক যার বাহুর দৈর্ঘ্য $\frac{p}{3}$ এর সমান এবং একটি কোণ $\angle B$ এর সমান। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

সমাধান:

ক)

খ)

যেকোনো রশ্মি RX থেকে $RQ = p$ কেটে নেই। R বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle B$ এবং Q বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle C$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle ERX$ ও $\angle FQR$ আঁকি। ER ও FQ A বিন্দুতে ছেদ করে। এবার A বিন্দুতে ER এর যে পাশে $\angle ERX$ অবস্থিত সে ই পাশে $\angle RAB = \frac{1}{2}\angle B$ এবং FQ এর যে পাশে $\angle FQR$ অবস্থিত সে ই পাশে $\angle QAC = \frac{1}{2}\angle C$ আঁকি। AB ও AC রেখাংশ, RQ কে যথাক্রমে B C বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore ABC$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

২০২৫

গ) রম্বসের বাহুর দৈর্ঘ্য $\frac{1}{3}p$, একটি কোণ $\angle B = 60^\circ$ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

BX যেকোনো রশ্মি থেকে $BA = \frac{1}{3}p$ কাটি। B বিন্দুতে $\angle ABE = 60^\circ$ আঁকি। BE থেকে $BC = AB$ নেই। আবার A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\frac{1}{3}p$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D; C, D যোগ করি। $\therefore ABCD$ উদ্দিস্ট রম্বস।

অনুশীলনী ৭.২

১. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটির পরিমাণ দেওয়া থাকলে নিম্নের কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব?

ক) 60° ও 36° খ) 40° ও 50°

গ) 30° ও 70° ঘ) 80° ও 20°

২. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি. ও 9 সে.মি. হলে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক) 4 খ) 5 গ) 6 ঘ) 13

৩. একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রতিটির দৈর্ঘ্য 18 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গসে.মি.?

ক) 36 খ) 81 গ) 162 ঘ) 324

৪. নির্দিস্ট একটি চতুর্ভুজ আঁকা সম্ভব যদি দেয়া থাকে -

(i) চারটি বাহু ও একটি কোণ

(ii) তিনটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

(iii) দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i　　খ) ii　　গ) i, ii　　ঘ) i, ii ও iii

৫. রম্বসের -

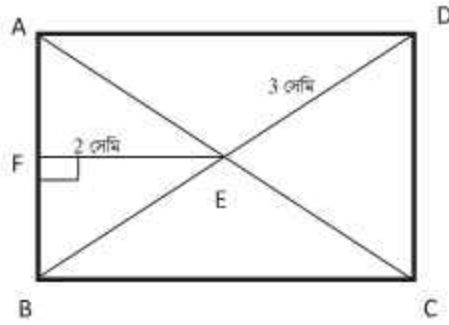
(i) চারটি বাহু পরস্পর সমান

(ii) বিপরীত কোণ সমান

(iii) কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii　　খ) i, iii　　গ) ii, iii　　ঘ) i, ii ও iii

চিত্রে $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র, $EF = 2$ সে.মি. এবং $DE = 3$ সে.মি.। এই তথ্যের আলোকে (৬ - ৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৬. BF এর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক) 1　　খ) $\sqrt{5}$　　গ) $\sqrt{13}$　　ঘ) 5

৭. AB কত সে.মি.?

ক) 2　　খ) $2\sqrt{5}$　　গ) $5\sqrt{2}$　　ঘ) 10

৮. $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গসে.মি.?

ক) $8\sqrt{5}$　　খ) 20　　গ) $12\sqrt{5}$　　ঘ) $32\sqrt{5}$

৯. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন কর:

ক) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 3 সে.মি. এবং একটি কোণ $45°$।

খ) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি, 4 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং একটি কর্ণ 5 সে.মি.।

গ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.2 সে.মি., 3 সে.মি., 3.5 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণ 2.8 সে.মি. ও 4.5 সে.মি.।

ঘ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 4 সে.মি. এবং দুইটি কোণ $60°$ ও $45°$।

১০. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে সামান্তরিক অঙ্কন কর:

ক) দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 6.5 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 45°।

খ) একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., 6.5 সে.মি.।

১১. $ABCD$ চতুর্ভুজের AB ও BC বাহু এবং $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$ কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

১২. $ABCD$ চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু দ্বারা কর্ণ দুইটির চারটি খণ্ডিত অংশ এবং এদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ যথাক্রমে $OA = 4$ সে.মি., $OB = 5$ সে.মি., $OC = 3.5$ সে.মি., $OD = 4.5$ সে.মি. ও $\angle AOB = 80^\circ$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

১৩. রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি. ও একটি কোণ 45°; রম্বসটি আঁক।

১৪. রম্বসের একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

১৫. রম্বসের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

১৬. বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁক।

১৭. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 5 সে.মি. ও এক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি.। উপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক) ত্রিভুজটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

খ) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)

গ) ত্রিভুজটির পরিসীমার সমান পরিসীমাবিশিষ্ট একটি বর্গ অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)

১৮. $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB = 4$ সে.মি., $BC = 5$, $\angle A = 85^\circ$, $\angle B = 80^\circ$ এবং $\angle C = 95^\circ$। উপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

ক) $\angle D$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী $ABCD$ চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)

গ) প্রদত্ত বাহু দুইটিকে একটি সামান্তরিকের বাহু এবং $\angle B = 80^\circ$ ধরে সামান্তরিকটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)

১৯. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. ও 6 সে.মি. এবং বৃহত্তম বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x = 60^\circ$ এবং $\angle y = 50^\circ$।

ক) প্রদত্ত তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) ট্রাপিজিয়ামটি আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

গ) উদ্দীপকের বাহু দুইটিকে সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও $\angle y$ কে অন্তর্ভুক্ত কোণ বিবেচনা করে সামান্তরিকটি আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

অধ্যায় ৮

বৃত্ত (Circle)

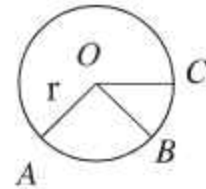
আমরা জেনেছি যে, বৃত্ত একটি সমতলীয় জ্যামিতিক চিত্র যার বিন্দুগুলো কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত। বৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন ধারণা যেমন কেন্দ্র, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, জ্যা ইত্যাদি বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে সমতলে কোনো বৃত্তের চাপ ও স্পর্শক সম্পর্কিত প্রতিজ্ঞার আলোচনা করা হবে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- বৃত্তচাপ, কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তস্থ কোণ, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বৃত্ত সংক্রান্ত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবে।
- বৃত্ত সংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে উপপাদ্যগুলো প্রয়োগ করতে পারবে।
- বৃত্ত সম্পর্কিত সম্পাদ্য বর্ণনা করতে পারবে।

বৃত্ত (Circle)

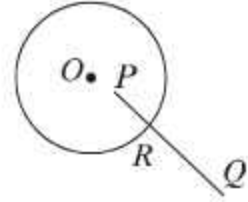
বৃত্ত একটি সমতলীয় জ্যামিতিক চিত্র যার বিন্দুগুলো কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত। নির্দিষ্ট বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্র। নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্ব বজায় রেখে কোনো বিন্দু যে আবদ্ধ পথ চিত্রিত করে তাই বৃত্ত। কেন্দ্র হতে বৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর দূরত্বকে ব্যাসার্ধ বলে।

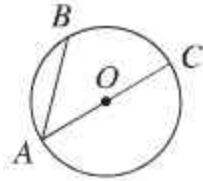
মনে করি, O সমতলের কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r নির্দিষ্ট পরিমাপ। সমতলস্থ যে সকল বিন্দু O থেকে r দূরত্বে অবস্থিত, এদের সেট বৃত্ত, যার কেন্দ্র O ও ব্যাসার্ধ r। চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র, A, B ও C বৃত্তস্থ বিন্দু। OA, OB ও OC এর প্রত্যেকটি বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

সমতলস্থ কতিপয় বিন্দুকে সমবৃত্ত বিন্দু বলা হয় যদি বিন্দুগুলো দিয়ে একটি বৃত্ত যায় অর্থাৎ, এমন একটি বৃত্ত থাকে যাতে বিন্দুগুলো অবস্থিত হয়। উপরের চিত্রে A, B ও C সমবৃত্ত বিন্দু।

বৃত্তের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগ (Interior and exterior of a circle)

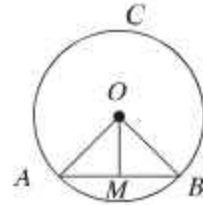
যদি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r হয় তবে O থেকে সমতলের যে সকল বিন্দুর দূরত্ব r এর চেয়ে কম এদের সেটকে বৃত্তটির অভ্যন্তর এবং O থেকে সমতলের যে সকল বিন্দুর দূরত্ব r এর

চেয়ে বেশি এদের সেটকে বৃত্তটির বহির্ভাগ বলা হয়। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সম্পূর্ণভাবে বৃত্তের অভ্যন্তরেই থাকে।

কোনো বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু ও বহিঃস্থ একটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটিকে একটি ও কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্রে, P বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু এবং Q বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। PQ রেখাংশ বৃত্তটিকে কেবল R বিন্দুতে ছেদ করে।

বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস (Chord and diameter of a circle)

বৃত্তের দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটির একটি জ্যা। বৃত্তের কোনো জ্যা যদি কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে জ্যাটিকে বৃত্তের ব্যাস বলা হয়। অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রগামী যেকোনো জ্যা হলো ব্যাস। চিত্রে, AB ও AC বৃত্তটির দুইটি জ্যা এবং বৃত্তটির কেন্দ্র O। এদের মধ্যে AC জ্যাটি ব্যাস; কারণ জ্যাটি বৃত্তটির কেন্দ্রগামী। OA ও OC বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ সুতরাং, বৃত্তের কেন্দ্র প্রত্যেক ব্যাসের মধ্যবিন্দু। অতএব প্রত্যেক ব্যাসের দৈর্ঘ্য $2r$, যেখানে r বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

উপপাদ্য ১৭. বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা AB এবং এই জ্যা এর মধ্য বিন্দু M। O, M যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, OM রেখাংশ AB জ্যা এর উপর লম্ব।

অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle OAM$ এবং $\triangle OBM$ এ

$AM = BM$ [$\because$ M, AB এর মধ্যবিন্দু]

$OA = OB$ [$\because$ উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং $OM = OM$ [সাধারণ বাহু]

সুতরাং, $\triangle OAM \cong \triangle OBM$ [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle OMA = \angle OMB$

ধাপ ২. যেহেতু কোণদ্বয় রৈখিক যুগল কোণ এবং এদের পরিমাপ সমান।

সুতরাং, $\angle OMA = \angle OMB =$ এক সমকোণ।

অতএব, $OM \perp AB$। (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত ১. বৃত্তের যেকোনো জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।

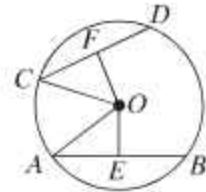
অনুসিদ্ধান্ত ২. যেকোনো সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না।

কাজ:

উপপাদ্য ১৭ এর বিপরীত উপপাদ্যটি নিম্নরূপ:
বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

উপপাদ্য ১৮. বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, O থেকে AB এবং CD জ্যাদ্বয় সমদূরবর্তী।

অঙ্কন: O থেকে AB এবং CD জ্যা এর উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব রেখাংশ আঁকি। O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$

সুতরাং, $AE = BE$ এবং $CF = DF$ [$\because$ কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$

ধাপ ২. কিন্তু $AB = CD$ [ধরে নেয়া]

$\therefore AE = CF$

ধাপ ৩. এখন $\triangle OAE$ এবং $\triangle OCF$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং

$AE = CF$ [ধাপ ২]

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCF$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

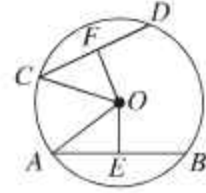
$\therefore OE = OF$

ধাপ ৪. কিন্তু OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে AB জ্যা এবং CD জ্যা এর দূরত্ব।

সুতরাং, AB এবং CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৯. বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা। O থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব। তাহলে OE ও OF কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে AB ও CD জ্যা এর দূরত্ব নির্দেশ করে। $OE = OF$ হলে প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = CD$

অঙ্কন: O, A ও O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. যেহেতু $OE \perp AB$ ও $OF \perp CD$

সুতরাং, $\angle OEA = \angle OFC =$ এক সমকোণ।

ধাপ ২. এখন, $\triangle OAE$ এবং $\triangle OCF$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং

$OE = OF$ [ধরে নেয়া]

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCF$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore AE = CF$

ধাপ ৩. $AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$ [$\because$ কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ ৪. সুতরাং $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

অর্থাৎ, $AB = CD$। (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত ৩. বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

অনুশীলনী ৮.১

১. প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব।

২. কোনো বৃত্তের AB এবং AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $AB = AC$।

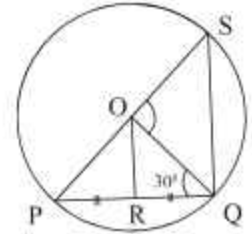
৩. কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

৪. দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির জ্যা AB অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AC = BD$।

৫. বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, এদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

৬. দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

৭. দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যাটি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

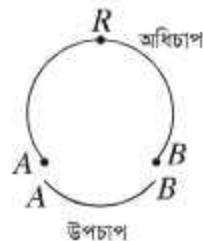
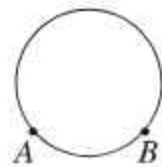
৮. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা $PQ = x$ সে.মি. এবং $OR \perp PQ$।
   ক) $\angle QOS$ কোণের পরিমাণ কত?
   খ) প্রমাণ কর যে, PS জ্যা বৃত্তটির বৃহত্তম জ্যা।
   গ) $OR = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ সে.মি. হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

৯. প্রমাণ কর যে, দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পাশে অপর দুই বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করলে, বিন্দু চারটি সমবৃত্ত হবে।

১০. প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

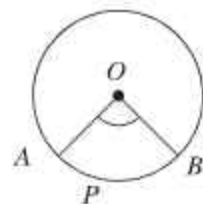
১১. দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

১২. প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে এদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

বৃত্তচাপ (Arc)

বৃত্তের যেকোনো দুইটি বিন্দুর মধ্যের পরিধির অংশকে চাপ বলে। চিত্রে A ও B দুইটি বিন্দুর মাঝে বৃত্তের অংশগুলো লক্ষ করি। দেখা যায়, দুইটি অংশের একটি অংশ ছোট, অন্যটি তুলনামূলকভাবে বড়। ছোট অংশটিকে উপচাপ ও বড়টিকে অধিচাপ বলা হয়। A ও B এই চাপের প্রান্তবিন্দু এবং চাপের অন্য সকল বিন্দু তার অন্তঃস্থ বিন্দু। চাপের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু R নির্দিষ্ট করে চাপটিকে ARB চাপ বলে অভিহিত করা হয় এবং ARB প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার কখনো উপচাপটি AB প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। বৃত্তের দুইটি বিন্দু A ও B বৃত্তটিকে দুইটি চাপে বিভক্ত করে। উভয় চাপের প্রান্তবিন্দু A ও B এবং প্রান্তবিন্দু ছাড়া চাপ দুইটির অন্য কোনো সাধারণ বিন্দু নেই।

কোণ কর্তৃক খণ্ডিত চাপ

একটি কোণ কোনো বৃত্তে একটি চাপ খণ্ডিত বা ছিন্ন করে বলা হয় যদি

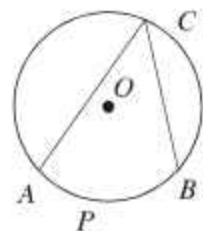
১. চাপটির প্রত্যেক প্রান্তবিন্দু কোণটির বাহুতে অবস্থিত হয়,
২. কোণটির প্রত্যেক বাহুতে চাপটির অন্তত একটি প্রান্তবিন্দু অবস্থিত হয় এবং
৩. চাপটির অন্তঃস্থ প্রত্যেকটি বিন্দু কোণটির অভ্যন্তরে থাকে। চিত্রে প্রদর্শিত কোণটি O কেন্দ্রিক বৃত্তে APB চাপ খণ্ডিত করে।

বৃত্তস্থ কোণ (Inscribed angle)

বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে বৃত্তের উপর কোনো বিন্দুতে ছেদ করলে এদের মধ্যবর্তী কোণকে বৃত্তস্থ কোণ বা বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোণ বলা হয়। চিত্রে $\angle ACB$ বৃত্তস্থ কোণ। প্রত্যেক বৃত্তস্থ কোণ বৃত্তে একটি চাপ খণ্ডিত করে। এই চাপ উপচাপ, অর্ধবৃত্ত অথবা অধিচাপ হতে পারে।

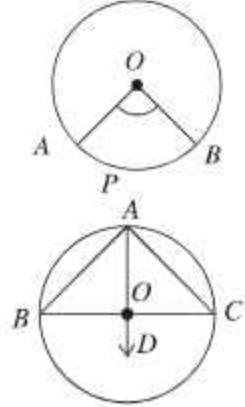
একটি বৃত্তস্থ কোণ বৃত্তে যে চাপ খণ্ডিত করে, কোণটি সেই চাপের ওপর দণ্ডায়মান এবং খণ্ডিত চাপের অনুবন্ধী চাপে অন্তর্লিখিত বলা হয়।

পাশের চিত্রে বৃত্তস্থ কোণটি APB চাপের ওপর দণ্ডায়মান এবং ACB চাপে অন্তর্লিখিত।

লক্ষণীয় যে, APB ও ACB একে অপরের অনুবন্ধী চাপ।

মন্তব্য: বৃত্তের কোনো চাপে অন্তর্লিখিত একটি কোণ হচ্ছে সেই কোণ যার শীর্ষবিন্দু ঐ চাপের একটি

অন্তঃস্থ বিন্দু এবং যার এক একটি বাহু ঐ চাপের এক একটি প্রান্তবিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তের কোনো চাপে দণ্ডায়মান একটি বৃত্তস্থ কোণ হচ্ছে ঐ চাপের অনুবন্ধী চাপে অন্তর্লিখিত একটি কোণ।

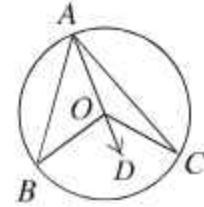
কেন্দ্রস্থ কোণ (Central angle)

একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে, কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয় এবং কোণটি বৃত্তে যে চাপ খণ্ডিত করে সেই চাপের ওপর তা দণ্ডায়মান বলা হয়। পাশের চিত্রের $\angle AOB$ কোণটি একটি কেন্দ্রস্থ কোণ এবং তা APB চাপের ওপর দণ্ডায়মান। প্রত্যেক কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তে একটি উপচাপ খণ্ডিত করে। চিত্রে APB একটি উপচাপ। বৃত্তের কোনো উপচাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বলতে এরূপ কোণকেই বোঝায় যার শীর্ষবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত এবং যার বাহুদ্বয় ঐ চাপের প্রান্তবিন্দু দুইটি দিয়ে যায়।

অর্ধবৃত্তের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বিবেচনার জন্য ওপরে উল্লেখিত বর্ণনা অর্থবহ নয়। অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রে কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ সরলকোণ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$ সমকোণ।

উপপাদ্য ২০. বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং তার একই উপচাপ BC এর ওপর দণ্ডায়মান $\angle BAC$ বৃত্তস্থ এবং $\angle BOC$ কেন্দ্রস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 2\angle BAC$

অঙ্কন: মনে করি, AC রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয়। এ ক্ষেত্রে A বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ AD আঁকি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle AOB$ এর বহিঃস্থ কোণ $\angle BOD = \angle BAO + \angle ABO$ [$\because$ বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ ২. $\triangle AOB$ এ $OA = OB$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

অতএব, $\angle BAO = \angle ABO$ [$\because$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ ৩. ধাপ (১) ও (২) থেকে $\angle BOD = 2\angle BAO$

ধাপ ৪. একইভাবে $\triangle AOC$ থেকে $\angle COD = 2\angle CAO$

ধাপ ৫. ধাপ (৩) ও (৪) থেকে

$\angle BOD + \angle COD = 2\angle BAO + 2\angle CAO$ [যোগ করে]

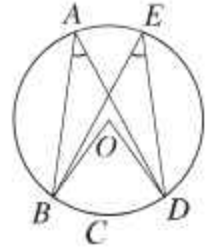
অর্থাৎ $\angle BOC = 2\angle BAC$। (প্রমাণিত)

অন্যভাবে বলা যায়, বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।

কাজ: O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC বৃত্তের AC রেখা কেন্দ্রগামী হলে উপপাদ্য ২০ প্রমাণ কর।

উপপাদ্য ২১. বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং বৃত্তের BCD চাপের ওপর দণ্ডায়মান $\angle BAD$ এবং $\angle BED$ দুইটি বৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAD = \angle BED$।

অঙ্কন: O, B এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. এখানে BCD চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOD$।

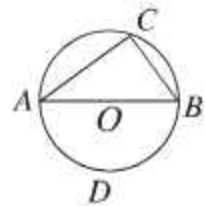
সুতরাং, $\angle BOD = 2\angle BAD$ এবং $\angle BOD = 2\angle BED$ [$\because$ একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

$\therefore 2\angle BAD = 2\angle BED$

বা $\angle BAD = \angle BED$। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ২২. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB$ এক সমকোণ।

অঙ্কন: AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত, তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D নিই।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ADB চাপের ওপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (কেন্দ্রস্থ সরল কোণ $\angle AOB$) [$\because$ একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

ধাপ ২. কিন্তু সরলকোণ $\angle AOB$ = দুই সমকোণ।

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2}$ (দুই সমকোণ) = এক সমকোণ। (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত ৪. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস ধরে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা সমকৌণিক শীর্ষবিন্দু দিয়ে যাবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৫. কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ সূক্ষ্মকোণ।

কাজ:
প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ স্থূলকোণ।

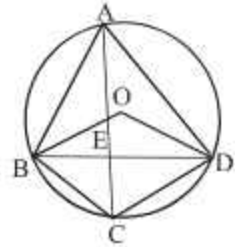
অনুশীলনী ৮.২

১. O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে $ABCD$ একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$

২. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $ABCD$ একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A, O, C এক সরলরেখায় অবস্থিত।

৩. দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

৪. চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OB = 2.5$ সে.মি.
   ক) $ABCD$ বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় কর।
   খ) প্রমাণ কর যে, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$
   গ) AC ও BD পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$

৫. $ABCD$ বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, $\triangle AED$ ও $\triangle BEC$ সদৃশকোণী।

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ (Inscribed Quadrilaterals)

বৃত্তীয় চতুর্ভুজ বা বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ হলো এমন চতুর্ভুজ যার চারটি শীর্ষবিন্দু বৃত্তের উপর অবস্থিত। এ সকল চতুর্ভুজের বিশেষ কিছু ধর্ম রয়েছে। বিষয়টি অনুধাবনের জন্য নিচের কাজটি করি।

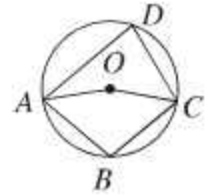
কাজ: বিভিন্ন আকারের কয়েকটি বৃত্তীয় চতুর্ভুজ আঁক। কয়েকটি বিভিন্ন ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কন করে প্রতিটির উপর চারটি করে বিন্দু নিয়ে চতুর্ভুজগুলো সহজেই আঁকা যায়। চতুর্ভুজের কোণগুলো মেপে নিচের সারণিটি পূরণ কর।

ক্রমিক নং	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
১						
২						
৩						
৪						
৫						

সারণি থেকে কী বোঝা যায়?

উপপাদ্য ২৩. বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে $ABCD$ চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ এবং $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন: O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. একই চাপ ADC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ABC$)

অর্থাৎ, প্রবৃদ্ধ $\angle AOC = 2\angle ABC$ [বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২. আবার, একই চাপ ABC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ADC$)

অর্থাৎ কোণ $\angle AOC = 2\angle ADC$ [বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC +$ কোণ $\angle AOC = 2(\angle ABC + \angle ADC)$

কিন্তু প্রবৃদ্ধ $\angle AOC +$ কোণ $\angle AOC =$ চার সমকোণ

$\therefore 2(\angle ABC + \angle ADC) =$ চার সমকোণ

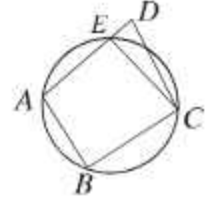
$\therefore \angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ।

একইভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত ৬. বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ৭. বৃত্তে অন্তর্লিখিত সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র।

উপপাদ্য ২৪. কোনো চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে তার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত হয়।

মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজে $\angle ABC + \angle ADC$ = দুই সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।
অঙ্কন: যেহেতু A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়, সুতরাং বিন্দু তিনটি দিয়ে যায় এরূপ একটি ও কেবল একটি বৃত্ত আছে। মনে করি, বৃত্তটি AD রেখাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে $ABCE$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

সুতরাং $\angle ABC + \angle AEC$ = দুই সমকোণ [বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC$ = দুই সমকোণ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$

কিন্তু তা অসম্ভব। কারণ চিত্রে $\triangle CED$ এর বহিঃস্থ $\angle AEC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle ADC$

সুতরাং E এবং D বিন্দুদ্বয় ভিন্ন হতে পারে না। E বিন্দু অবশ্যই D বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।

অতএব, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

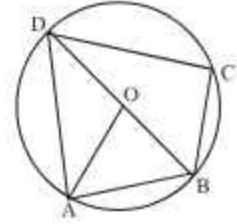
অনুশীলনী ৮.৩

১. $\triangle ABC$ এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

২. $ABCD$ একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ ও $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

৩. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।

৪. $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BC = CD$।

৫. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2.5 সে.মি., $AB = 3$ সে.মি. এবং BD, $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।
   ক) AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
   খ) দেখাও যে, $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$।
   গ) প্রমাণ কর যে, $AB = BC$।

৬. সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, এদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

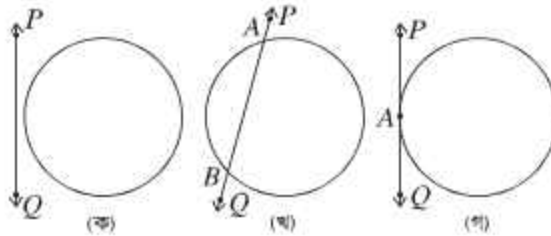
৭. প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের ওপর ছেদ করে।

বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক (Secant and Tangent of a Circle)

সমতলে একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার পারস্পরিক অবস্থান বিবেচনা করি। এক্ষেত্রে নিচের চিত্রের প্রদত্ত তিনটি সম্ভাবনা রয়েছে:

ক) বৃত্ত ও সরলরেখার কোনো সাধারণ বিন্দু নেই,

খ) সরলরেখাটি বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করেছে,

গ) সরলরেখাটি বৃত্তকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

সমতলে একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার সর্বাধিক দুইটি ছেদবিন্দু থাকতে পারে। সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি ছেদক বলা হয় এবং যদি একটি ও কেবল একটি সাধারণ বিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলা হয়। শেষোক্ত ক্ষেত্রে, সাধারণ বিন্দুটিকে ঐ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু বলা হয়। উপরের চিত্রে একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার পারস্পরিক অবস্থান দেখানো হয়েছে।

চিত্র-ক এ বৃত্ত ও PQ সরলরেখার কোনো সাধারণ বিন্দু নেই, চিত্র-খ এ PQ সরলরেখাটি বৃত্তকে A ও B দুইটি বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং চিত্র-গ এ PQ সরলরেখাটি বৃত্তকে A বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। PQ বৃত্তটির স্পর্শক ও A এই স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু।

মন্তব্য: বৃত্তের প্রত্যেক ছেদকের ছেদবিন্দুদ্বয়ের অন্তর্বর্তী সকল বিন্দু বৃত্তটির অভ্যন্তরে থাকে।

সাধারণ স্পর্শক (Common tangent)

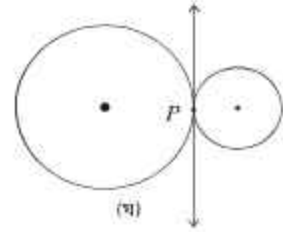
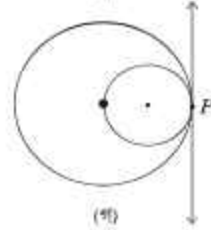
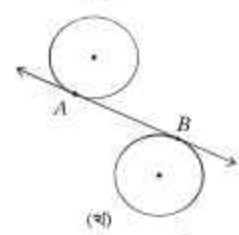
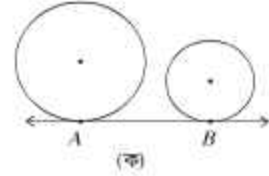
একটি সরলরেখা যদি দুইটি বৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে একে বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক বলা হয়। পাশের চিত্রগুলোতে AB উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক। চিত্র-ক ও চিত্র-খ এ স্পর্শবিন্দু ভিন্ন ভিন্ন। চিত্র-গ ও চিত্র-ঘ এ স্পর্শবিন্দু একই।

দুইটি বৃত্তের কোনো সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি ভিন্ন হলে স্পর্শকটিকে

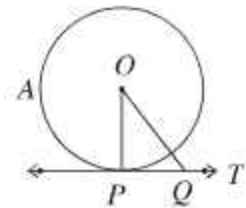
ক) সরল সাধারণ স্পর্শক বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকে এবং

খ) তির্যক সাধারণ স্পর্শক বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে।

চিত্র-ক এ স্পর্শকটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং চিত্র-খ এ স্পর্শকটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক যদি বৃত্ত দুইটিকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করে তবে ঐ বিন্দুতে বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করে বলা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে, বৃত্ত দুইটির অন্তঃস্পর্শ হয়েছে বলা হয় যদি কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকে এবং বহিঃস্পর্শ হয়েছে বলা হয় যদি কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে। চিত্র-গ এ বৃত্ত দুইটির অন্তঃস্পর্শ এবং চিত্র-ঘ এ বহিঃস্পর্শ হয়েছে।

উপপাদ্য ২৫. বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের ওপরস্থ P বিন্দুতে PT একটি স্পর্শক এবং OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। প্রমাণ করতে হবে যে, $PT \perp OP$.

অঙ্কন: PT স্পর্শকের ওপর যেকোনো একটি বিন্দু Q নিই এবং O, Q যোগ করি।

প্রমাণ: যেহেতু বৃত্তের P বিন্দুতে PT একটি স্পর্শক, সুতরাং ঐ P বিন্দু ব্যতীত PT এর ওপরস্থ অন্য সকল বিন্দু বৃত্তের বাইরে থাকবে। সুতরাং Q বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত।

$\therefore$ OQ বৃত্তের ব্যাসার্ধ OP এর চেয়ে বড়, অর্থাৎ, $OQ > OP$ এবং তা স্পর্শবিন্দু P ব্যতীত PT এর ওপরস্থ Q বিন্দুর সকল অবস্থানের জন্য সত্য।

$\therefore$ কেন্দ্র O থেকে PT স্পর্শকের ওপর OP হলো ক্ষুদ্রতম দূরত্ব।

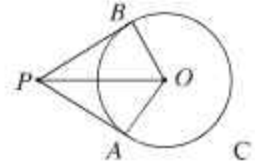
সুতরাং $PT \perp OP$ [কোনো সরলরেখার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে উক্ত সরলরেখার উপর যতগুলো রেখাংশ টানা যায় তন্মধ্যে লম্ব রেখাংশটিই ক্ষুদ্রতম]

(প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত ৮. বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত ৯. স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের ওপর অঙ্কিত লম্ব কেন্দ্রগামী।

অনুসিদ্ধান্ত ১০. বৃত্তের কোনো বিন্দু দিয়ে ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক হয়।

উপপাদ্য ২৬. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং PA ও PB রেখাংশদ্বয় বৃত্তের A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, $PA = PB$

অঙ্কন: $O, A; O, B$ এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. যেহেতু PA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সেহেতু $PA \perp OA$

$\therefore \angle PAO =$ এক সমকোণ। [$\because$ স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব]

অনুরূপে $\angle PBO =$ এক সমকোণ।

$\therefore \triangle PAO$ এবং $\triangle PBO$ উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ ২. এখন, $\triangle PAO$ এবং $\triangle PBO$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ $PO =$ অতিভুজ PO এবং $OA = OB$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \triangle PAO \cong \triangle PBO$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

$\therefore PA = PB$। (প্রমাণিত)

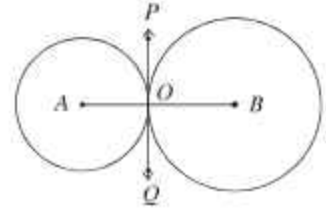
মন্তব্য:

১. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, স্পর্শবিন্দু ছাড়া প্রত্যেক বৃত্তের অন্য সকল বিন্দু অপর বৃত্তের বাইরে থাকবে।

২. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে, স্পর্শবিন্দু ছাড়া ছোট বৃত্তের অন্য সকল বিন্দু বড় বৃত্তটির অভ্যন্তরে থাকবে।

উপপাদ্য ২৭. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, এদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শ বিন্দু সমরেখ।

মনে করি, A ও B কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পর O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, A, O, B বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন: যেহেতু বৃত্তদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে স্পর্শ করেছে, সুতরাং O বিন্দুতে এদের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকবে। এখন O বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক POQ অঙ্কন করি এবং O, A ও O, B যোগ করি।

প্রমাণ:

A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং POQ স্পর্শক।

সুতরাং $\angle POA =$ এক সমকোণ। তদ্রুপ $\angle POB =$ এক সমকোণ

$\angle POA + \angle POB =$ এক সমকোণ + এক সমকোণ = দুই সমকোণ।

বা $\angle AOB =$ দুই সমকোণ

অর্থাৎ, $\angle AOB$ একটি সরলকোণ।

$\therefore A,\ O,\ B$ বিন্দুত্রয় সমরেখ। (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত ১১. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ১২. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান।

কাজ: প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করলে, এদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ হবে।

অনুশীলনী ৮.৪

১. O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হলো। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

২. প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৩. AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

৪. প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে, তারা পরস্পর সম্পূরক।

৫. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে বৃত্তে PA ও PB দুইটি স্পর্শক।

ক) উদ্দীপকের আলোকে চিত্র আঁক।

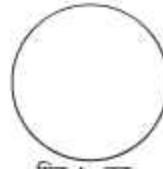
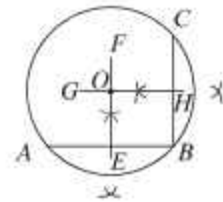
খ) প্রমাণ কর যে, $PA = PB$

গ) প্রমাণ কর যে, OP রেখাংশ স্পর্শ-জ্যা এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

৬. দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ কর যে, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বৃত্ত সম্পর্কীয় সম্পাদ্য (Constructions related to Circles)

সম্পাদ্য ৬. একটি বৃত্ত বা বৃত্তচাপ দেওয়া আছে, কেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।

একটি বৃত্ত (চিত্র-১) বা বৃত্তচাপ (চিত্র-২) দেওয়া আছে, বৃত্তটির বা বৃত্তচাপটির কেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।
অঙ্কন: প্রদত্ত বৃত্তে বা বৃত্তচাপে তিনটি বিন্দু A, B ও C নিই। A, B ও B, C যোগ করি। AB ও BC জ্যা দুইটির লম্বদ্বিখণ্ডক। যথাক্রমে EF, GH রেখাংশ দুইটি টানি। মনে করি, তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, O বিন্দুই বৃত্তের বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র।
প্রমাণ: EF রেখাংশ AB জ্যা এর এবং GH রেখাংশ BC জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক। কিন্তু EF ও GH উভয়ে কেন্দ্রগামী এবং O এদের সাধারণ ছেদ বিন্দু। সুতরাং O বিন্দুই বৃত্তের বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র।

বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন

আমরা জেনেছি যে, বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শক আঁকা যায় না। বিন্দুটি যদি বৃত্তের ওপর থাকে তাহলে উক্ত বিন্দুতে বৃত্তের একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। স্পর্শকটি বর্ণিত বিন্দুতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধের উপর লম্ব হয়। সুতরাং, বৃত্তস্থিত কোনো বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করতে হলে বর্ণিত বিন্দুতে ব্যাসার্ধ অঙ্কন করে ব্যাসার্ধের উপর লম্ব আঁকতে হবে। আবার বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত হলে তা থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক আঁকা যাবে।

সম্পাদ্য ৭. বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে A একটি বিন্দু। A বিন্দুতে বৃত্তটিতে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।

অঙ্কন: O, A যোগ করি। A বিন্দুতে OA এর উপর AP লম্ব আঁকি। তাহলে AP নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রমাণ: OA রেখাংশ A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং AP তার ওপর লম্ব। সুতরাং, AP রেখাই নির্ণেয় স্পর্শক।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক আঁকা যায়।

সম্পাদ্য ৮. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তটির স্পর্শক আঁকতে হবে।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু। P বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে স্পর্শক আঁকতে হবে।

অঙ্কন:

১. P, O যোগ করি। PO রেখাংশের মধ্যবিন্দু M নির্ণয় করি।
২. এখন M কে কেন্দ্র করে MO এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। মনে করি, নতুন অঙ্কিত বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।
৩. A, P এবং B, P যোগ করি।

তাহলে, AP, BP উভয়েই নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রমাণ: A, O ও B, O যোগ করি। APB বৃত্তে PO ব্যাস।

$\therefore \angle PAO$ = এক সমকোণ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ]

সুতরাং, OA রেখাংশ AP রেখাংশের ওপর লম্ব। অতএব, O কেন্দ্রিক বৃত্তের A বিন্দুতে AP রেখাংশ একটি স্পর্শক। অনুরূপভাবে, BP রেখাংশও একটি স্পর্শক।

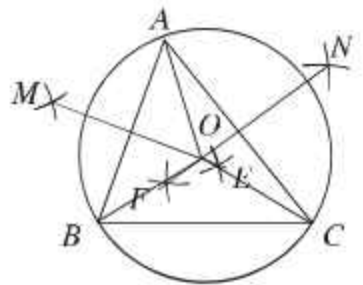
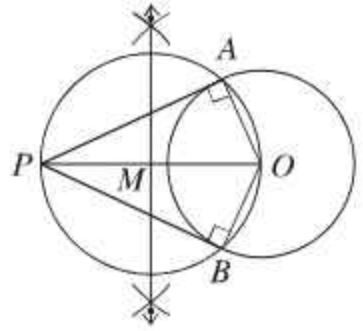
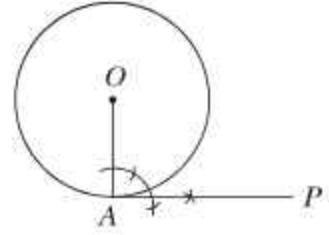
বিশেষ দ্রষ্টব্য: বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে দুইটি ও কেবল দুইটি স্পর্শক আঁকা যায়।

সম্পাদ্য ৯. কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ, এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কন:

১. AB ও AC রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।
২. A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই $\triangle ABC$ এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রমাণ: B, O ও C, O যোগ করি। O বিন্দুটি AB এর লম্বদ্বিখণ্ডক EM এর ওপর অবস্থিত।

$\therefore OA = OB$, একইভাবে, $OA = OC$

$\therefore OA = OB = OC$

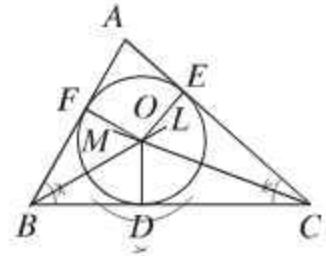
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু তিনটি দিয়ে যাবে। সুতরাং এই বৃত্তটিই $\triangle ABC$ এর পরিবৃত্ত।

> **কাজ:** ওপরের চিত্রে একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকা হয়েছে। স্থূলকোণী এবং সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

লক্ষণীয় যে, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের অভ্যন্তরে, স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের বহির্ভাগে এবং সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র অতিভুজের ওপর অবস্থিত।

সম্পাদ্য ১০. কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে।

মনে করি, $\triangle ABC$ একটি ত্রিভুজ। এর অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ, $\triangle ABC$ এর ভিতরে এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা BC, CA ও AB বাহু তিনটির প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন: $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BL ও CM আঁকি। মনে করি, তারা O বিন্দুতে ছেদ করে। O থেকে BC এর ওপর OD লম্ব আঁকি এবং মনে করি, তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে, এই বৃত্তটিই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

প্রমাণ: O থেকে AC ও AB এর ওপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব টানি। মনে করি, লম্বদ্বয় বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

O বিন্দু $\angle ABC$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।

$\therefore OF = OD$

অনুরূপভাবে, O বিন্দু $\angle ACB$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত বলে $OE = OD$

$\therefore OD = OE = OF$

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা D, E ও F বিন্দু দিয়ে যাবে।

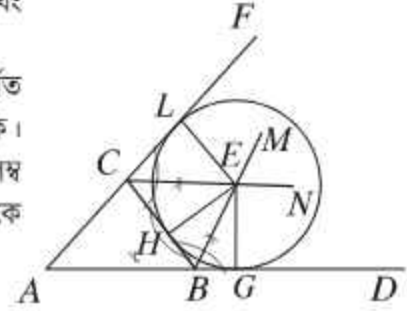
আবার, OD, OE ও OF এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে BC, AC ও AB লম্ব।

সুতরাং বৃত্তটি $\triangle ABC$ এর ভিতরে থেকে এর বাহু তিনটিকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে।

অতএব, DEF বৃত্তটিই $\triangle ABC$ এর অন্তর্বৃত্ত হবে।

সম্পাদ্য ১১. কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। এর বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ, এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন: AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রম D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করি। $\angle DBC$ ও $\angle FCB$ এর সমদ্বিখণ্ডক BM ও CN আঁকি। মনে করি, E এদের ছেদবিন্দু। E থেকে BC এর ওপর EH লম্ব আঁকি এবং মনে করি তা BC কে H বিন্দুতে ছেদ করে। E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে, এই বৃত্তটিই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত।

প্রমাণ: E থেকে BD ও CF রেখাংশের ওপর যথাক্রমে EG ও EL লম্ব টানি। মনে করি, লম্বদ্বয় BD ও CF রেখাংশদ্বয়কে যথাক্রমে G ও L বিন্দুতে ছেদ করে।

E বিন্দুটি $\angle DBC$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত $\therefore EH = EG$

অনুরূপভাবে, E বিন্দুটি $\angle FCB$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত বলে $EH = EL$

$\therefore EH = EG = EL$

সুতরাং E কে কেন্দ্র করে EL এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত H, G এবং L বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার, EH, EG ও EL এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে BC, BD ও CF রেখাংশ তিনটি লম্ব।

সুতরাং বৃত্তটি রেখাংশ তিনটিকে যথাক্রমে H, G ও L বিন্দু তিনটিতে স্পর্শ করে।

অতএব, HGL বৃত্তটিই $\triangle ABC$ এর বহির্বৃত্ত হবে।

মন্তব্য: কোনো ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত আঁকা যায়।

কাজ: ত্রিভুজের অপর দুইটি বহির্বৃত্ত আঁক।

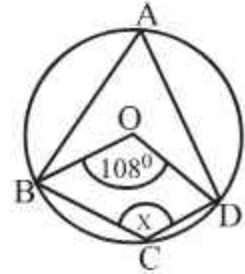
অনুশীলনী ৮.৫

১. কোন বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ -

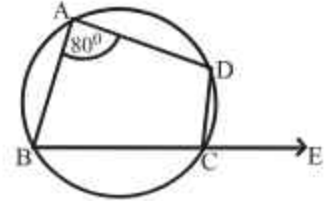
ক) সূক্ষ্মকোণ খ) স্থূলকোণ
গ) সমকোণ ঘ) পূরককোণ

২. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে x এর মান কত?

ক) $126°$ খ) $108°$

গ) $72°$ ঘ) $54°$

৩. পাশের চিত্রে $\frac{1}{2}\angle ECD =$ কত ডিগ্রী?

ক) $40°$ খ) $50°$

গ) $80°$ ঘ) $100°$

৪. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। এদের একটির ব্যাস 8 সে.মি. এবং অপরটির ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. হলে, এদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত সে.মি. হবে?

ক) 0 খ) 4 গ) 8 ঘ) 12

৫. O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক PQ ও PR টানা হলে $\triangle PQR$ হবে–

(i) সমদ্বিবাহু

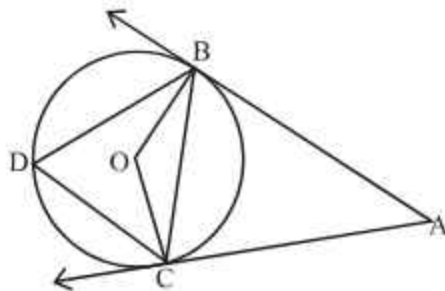
(ii) সমবাহু

(iii) সমকোণী

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) i ও ii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৬. ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হলে, $\angle BOC =$ কত ডিগ্রি?

ক) $30°$ খ) $60°$ গ) $90°$ ঘ) $120°$

AB ও AC রেখাদ্বয় BCD বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle BAC = 60°$. এই তথ্যের আলোকে (৭ - ৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৭. $\angle BOC$ এর মান কত?

ক) 300° খ) 270° গ) 120° ঘ) 90°

৮. D, BDC চাপের মধ্যবিন্দু হলে–

(i) $\angle BDC = \angle BAC$

(ii) $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

(iii) $\angle BOC = \angle DBC + \angle BCD$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৯. কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

১০. কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।

১১. কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

১২. 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 4.5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

১৩. 5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁক।

১৪. একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁক।

১৫. O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$

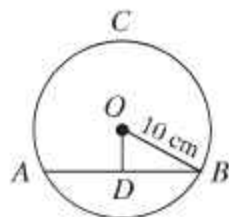
১৬. দুইটি সমান ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোন সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\triangle PAQ$ সমদ্বিবাহু।

১৭. O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা $AB = x$ সে.মি., $OD \perp AB$।

পাশের চিত্র অনুযায়ী নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

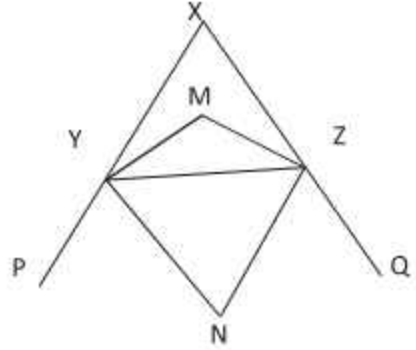
ক) বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।

গ) $OD = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ সে.মি. হলে x এর মান নির্ণয় কর।

১৮. চিত্রে YM ও ZM যথাক্রমে $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং YN ও ZN যথাক্রমে $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক।

ক) দেখাও যে, $\angle MYZ + \angle NYZ = 90^\circ$

খ) প্রমাণ কর যে, $\angle YNZ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle X$

গ) প্রমাণ কর যে, Y, M, Z ও N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত

১৯. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি., 5 সে.মি. ও 6 সে.মি.। উপরের তথ্য অনুযায়ী নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ) ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

গ) ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বাইরে যেকোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের দুইটি স্পর্শ অঙ্কন করে দেখাও যে স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান।

অধ্যায় ৯

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratio)

আমরা প্রতিনিয়ত ত্রিভুজ, বিশেষ করে সমকোণী ত্রিভুজের ব্যবহার করে থাকি। আমাদের চারিদিকের পরিবেশে নানা উদাহরণ দেখা যায় যেখানে কল্পনায় সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করা যায়। সেই প্রাচীন যুগে মানুষ জ্যামিতির সাহায্যে নদীর তীরে দাঁড়িয়ে নদীর প্রস্থ নির্ণয় করার কৌশল শিখেছিল। গাছে না উঠেও গাছের ছায়ার সঙ্গে লাঠির তুলনা করে নিখুঁতভাবে গাছের উচ্চতা মাপতে শিখেছিল। এই গাণিতিক কৌশল শেখানোর জন্য সৃষ্টি হয়েছে ত্রিকোণমিতি নামে গণিতের এক বিশেষ শাখা। Trigonometry শব্দটি গ্রিক শব্দ tri (অর্থ তিন), gon (অর্থ ধার) ও metron (অর্থ পরিমাপ) দ্বারা গঠিত। ত্রিকোণমিতিতে ত্রিভুজের বাহু ও কোণের মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ে পাঠদান করা হয়। মিশর ও ব্যাবিলনীয় সভ্যতায় ত্রিকোণমিতি ব্যবহারের নিদর্শন রয়েছে। মিশরীয়রা ভূমি জরিপ ও প্রকৌশল কাজে এর বহুল ব্যবহার করত বলে ধারণা করা হয়। এর সাহায্যে জ্যোতির্বিদগণ পৃথিবী থেকে দূরবর্তী গ্রহ-নক্ষত্রের দূরত্ব নির্ণয় করতেন। অধুনা ত্রিকোণমিতির ব্যবহার গণিতের সকল শাখায়। ত্রিভুজ সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান, নেভিগেশন ইত্যাদি ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতির ব্যাপক ব্যবহার হয়ে থাকে। জ্যোতির্বিজ্ঞান, ক্যালকুলাসসহ গণিতের অন্যান্য গুরুত্বপূর্ণ শাখায় ত্রিকোণমিতির ব্যবহার রয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বর্ণনা করতে পারবে।
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর ধ্রুবতা যাচাই করে প্রমাণ ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- 0° ও 90° কোণের অর্থপূর্ণ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয় করে প্রয়োগ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলির প্রয়োগ করতে পারবে।

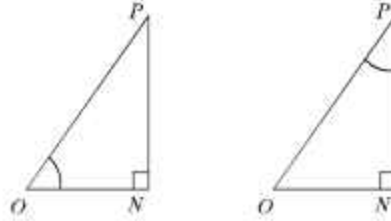
সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর নামকরণ

আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো অতিভুজ, ভূমি ও উন্নতি নামে অভিহিত হয়। ত্রিভুজের

অনুভূমিক অবস্থানের জন্য এ নামসমূহ সার্থক। আবার সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের একটির সাপেক্ষে অবস্থানের প্রেক্ষিতেও বাহুগুলোর নামকরণ করা হয়। যথা:

১. 'অতিভুজ (hypotenuse)', সমকোণী ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু যা সমকোণের বিপরীত বাহু

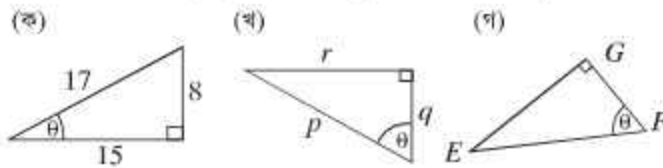
২. 'বিপরীত বাহু (opposite side)', যা হলো প্রদত্ত কোণের সরাসরি বিপরীত দিকের বাহু

৩. 'সন্নিহিত বাহু (adjacent side)', যা প্রদত্ত কোণ সৃষ্টিকারী একটি রেখাংশ।

$\angle PON$ কোণের জন্য অতিভুজ OP, সন্নিহিত বাহু ON, বিপরীত বাহু PN	$\angle OPN$ কোণের জন্য অতিভুজ OP, সন্নিহিত বাহু PN, বিপরীত বাহু ON

জ্যামিতিক চিত্রের শীর্ষবিন্দু চিহ্নিত করার জন্য বড় হাতের বর্ণ ও বাহু নির্দেশ করতে ছোট হাতের বর্ণ ব্যবহার করা হয়। কোণ নির্দেশের জন্য প্রায়শই গ্রিক বর্ণ ব্যবহৃত হয়। গ্রিক বর্ণমালার ছয়টি বহুল ব্যবহৃত বর্ণ হলো:

alpha α	beta β	gamma γ	theta θ	phi ϕ	omega ω
আলফা	বিটা	গামা	থিটা	ফাই	ওমেগা

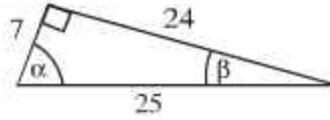
প্রাচীন গ্রিসের বিখ্যাত গণিতবিদদের হাত ধরেই জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতিতে গ্রিক বর্ণগুলোর ব্যবহার হয়ে আসছে।

উদাহরণ ১. θ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু চিহ্নিত কর।

সমাধান:

ক) অতিভুজ 17 একক
বিপরীত বাহু 8 একক
সন্নিহিত বাহু 15 একক

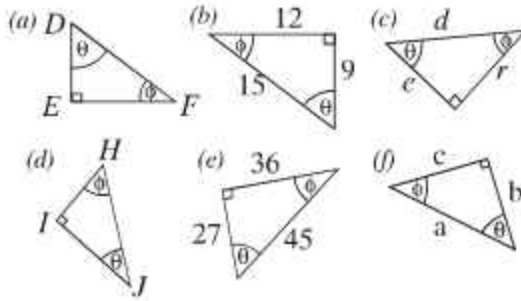
খ) অতিভুজ p
বিপরীত বাহু r
সন্নিহিত বাহু q

গ) অতিভুজ EF
বিপরীত বাহু EG
সন্নিহিত বাহু FG

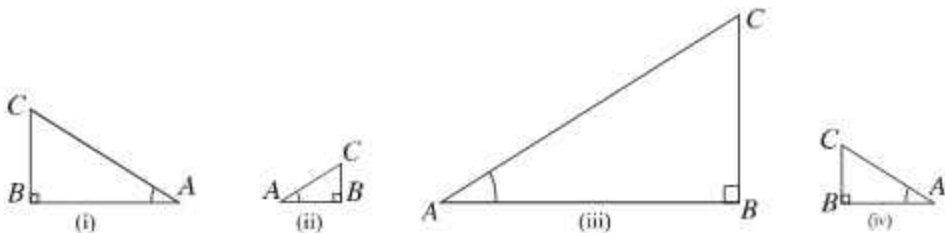
উদাহরণ ২. α ও β কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) α কোণের জন্য
অতিভুজ 25 একক
বিপরীত বাহু 24 একক
সন্নিহিত বাহু 7 একক

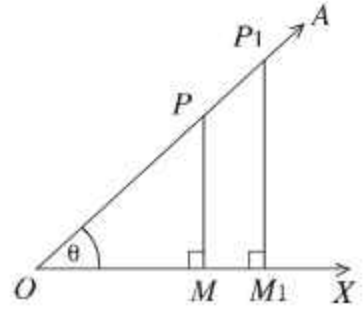
খ) β কোণের জন্য
অতিভুজ 25 একক
বিপরীত বাহু 7 একক
সন্নিহিত বাহু 24 একক

কাজ: θ ও ϕ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু নির্দেশ কর।

সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাতসমূহের ধ্রুবতা

কাজ: নিচের চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য মেপে সারণিটি পূরণ কর। ত্রিভুজের অনুপাতগুলো সম্পর্কে কী লক্ষ কর?

(i) (ii) (iii) (iv)

বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	AB	AC	BC/AC	AB/AC	BC/AB

মনে করি, $\angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। OA বাহুতে যেকোনো একটি বিন্দু P নিই। P থেকে OX বাহু পর্যন্ত PM লম্ব টানি। ফলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হলো। এই $\triangle POM$ এর PM, OM ও OP বাহুগুলোর যে তিনটি অনুপাত পাওয়া যায় এদের মান OA বাহুতে নির্বাচিত P বিন্দুর অবস্থানের ওপর নির্ভর করে না।

$\angle XOA$ কোণের OA বাহুতে যেকোনো বিন্দু P ও P_1 থেকে OX বাহু পর্যন্ত যথাক্রমে PM ও P_1M_1 লম্ব অঙ্কন করলে $\triangle POM$ ও $\triangle P_1OM_1$ দুইটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ গঠিত হয়।

এখন, $\triangle POM$ ও $\triangle P_1OM_1$ সদৃশ হওয়ায়,

$$\frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OP}{OP_1} \text{ বা, } \frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1}$$

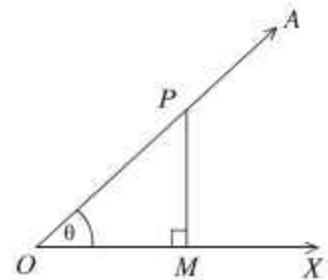
$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{OP}{OP_1} \text{ বা, } \frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1}$$

$$\frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OM}{OM_1} \text{ বা, } \frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1}$$

অর্থাৎ, অনুপাতসমূহের প্রত্যেকটি ধ্রুবক। এই অনুপাতসমূহকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলে।

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, $\angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। OA বাহুতে যেকোনো একটি বিন্দু P নিই। P থেকে OA বাহু পর্যন্ত PM লম্ব টানি। ফলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হলো। এই $\triangle POM$ এর PM, OM ও OP বাহুগুলোর যে ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায় এদের $\angle XOA$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয় এবং এদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সুনির্দিষ্ট নামে নামকরণ করা হয়।

$\angle XOA$ সাপেক্ষে সমকোণী ত্রিভুজ POM এর PM বিপরীত বাহু, OM সন্নিহিত বাহু, OP অতিভুজ। এখন $\angle XOA = \theta$ ধরলে, θ কোণের যে ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত পাওয়া যায় তা নিম্নে বর্ণনা করা হলো।

চিত্র থেকে,

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} \text{ [}\theta\text{ কোণের সাইন (sine)]}$$

$\cos\theta = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$ [θ কোণের কোসাইন (cosine)]

$\tan\theta = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$ [θ কোণের ট্যানজেন্ট (tangent)]

এবং এদের বিপরীত অনুপাত

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ [θ কোণের কোসেক্যান্ট (cosecant)]

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ [θ কোণের সেক্যান্ট (secant)]

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ [θ কোণের কোট্যানজেন্ট (cotangent)]

লক্ষ করি, $\sin\theta$ প্রতীকটি θ কোণের সাইন-এর অনুপাতকে বোঝায়; sin ও θ এর গুণফলকে নয়। θ বাদে sin আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না। ত্রিকোণমিতিক অন্যান্য অনুপাতের ক্ষেত্রেও বিষয়টি প্রযোজ্য।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর সম্পর্ক

মনে করি, $\angle XOA = \theta$ একটি সূক্ষ্মকোণ।
পাশের চিত্র সাপেক্ষে, সংজ্ঞানুযায়ী,

$\sin\theta = \dfrac{PM}{OP}$, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{OP}{PM}$

$\cos\theta = \dfrac{OM}{OP}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{OP}{OM}$

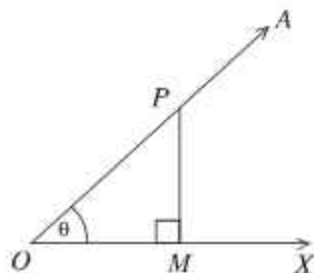
$\tan\theta = \dfrac{PM}{OM}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{OM}{PM}$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$ [লব ও হরকে OP দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\therefore \boxed{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

এবং একইভাবে,

$$\boxed{\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

$$(i)\ (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$$

$$= \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$$ [পিথাগোরাসের সূত্র]

$$= 1$$

বা, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$$\therefore \boxed{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1}$$

মন্তব্য: পূর্ণসংখ্যা সূচক n এর জন্য $(\sin\theta)^n$ কে $\sin^n\theta$ ও $(\cos\theta)^n$ কে $\cos^n\theta$ ইত্যাদি লেখা হয়।

$$(ii)\ \sec^2\theta = (\sec\theta)^2 = \left(\frac{OP}{OM}\right)^2$$

$$= \frac{OP^2}{OM^2} = \frac{OM^2 + PM^2}{OM^2}$$ [OP সমকোণী $\triangle POM$ এর অতিভূজ বলে]

$$= \frac{OM^2}{OM^2} + \frac{PM^2}{OM^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + \tan^2\theta$$

$\therefore \boxed{\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1}$ এবং $\boxed{\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1}$

$$(iii)\ \text{cosec}^2\theta = (\text{cosec}^2\theta)^2 = \left(\frac{OP}{PM}\right)^2$$

$$= \frac{OP^2}{PM^2} = \frac{PM^2 + OM^2}{PM^2}$$ [OP সমকোণী $\triangle POM$ এর অতিভূজ বলে]

$$= \frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2} = 1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$$

$$= 1 + (\cot\theta)^2 = 1 + \cot^2\theta$$

$\therefore \boxed{\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1}$ এবং $\boxed{\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1}$

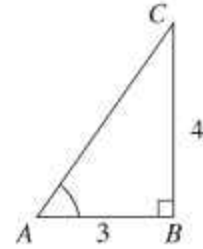
উদাহরণ ৩. $\tan A = \dfrac{4}{3}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan A = \dfrac{4}{3}$।

অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু = 4, সন্নিহিত বাহু = 3

অতিভুজ $=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

সুতরাং, $\sin A=\frac{4}{5}$, $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cot A=\frac{3}{4}$

$\operatorname{cosec} A=\frac{5}{4}$, $\sec A=\frac{5}{3}$

কাজ: নিচের ত্রিকোণমিতিক সূত্রগুলো সহজে মনে রাখার জন্য তালিকা কর।

$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$	$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$

উদাহরণ ৪. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A=1$ হলে $2\sin A.\cos A=1$ এর সত্যতা যাচাই কর।

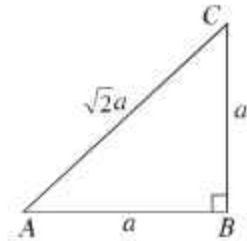
সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan A=1$

অতএব, বিপরীত বাহু = সন্নিহিত বাহু = a

অতিভুজ = $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

সুতরাং, $\sin A=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos A=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

এখন বামপক্ষ $=2\sin A\cdot\cos A=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2\cdot\frac{1}{2}=1=$ ডানপক্ষ।

$\therefore 2\sin A.\cos A=1$ উক্তিটি সত্য।

কাজ:

ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB=29$ সে.মি., $BC=21$ সে.মি. এবং $\angle ABC=\theta$ হলে, $\cos^2\theta-\sin^2\theta$ এর মান বের কর।

উদাহরণ ৫. প্রমাণ কর যে, $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta$

সমাধান:

বামপক্ষ $=\tan\theta+\cot\theta$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta \cdot \cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta \cdot \cos\theta} [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \dfrac{1}{\sin\theta} \cdot \dfrac{1}{\cos\theta}$

$= \text{cosec}\,\theta \cdot \sec\theta$

$= \sec\theta \cdot \text{cosec}\,\theta =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৬. প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta$

$= \dfrac{1}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$

$= \dfrac{1}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$

$= \dfrac{1}{\cos^2\theta} \cdot \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$= \sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta$

$=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৭. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta} + \dfrac{1}{1+\text{cosec}^2\theta} = 1$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \dfrac{1}{1+\sin^2\theta} + \dfrac{1}{1+\text{cosec}^2\theta}$

$= \dfrac{1}{1+\sin^2\theta} + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2\theta}}$

$= \dfrac{1}{1+\sin^2\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}$

$= \dfrac{1+\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}$

$= 1 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৮. প্রমাণ কর: $\dfrac{1}{2-\sin^2\theta}+\dfrac{1}{2+\tan^2\theta}=1$

সমাধান:

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1}{2-\sin^2\theta}+\frac{1}{2+\tan^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2-\sin^2\theta}+\frac{1}{2+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2-\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2-\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{2(1-\sin^2\theta)+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2-\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{2-2\sin^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2-\sin^2\theta}+\frac{1-\sin^2\theta}{2-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{2-\sin^2\theta}{2-\sin^2\theta}$$

$= 1 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৯. প্রমাণ কর: $\dfrac{\tan A}{\sec A+1}-\dfrac{\sec A-1}{\tan A}=0$

সমাধান:

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}$$

$$= \frac{\tan^2 A-(\sec^2 A-1)}{(\sec A+1)\tan A}$$

$$= \frac{\tan^2 A-\tan^2 A}{(\sec A+1)\tan A}\ [\because \sec^2 A-1=\tan^2 A]$$

$= \dfrac{0}{(\sec A+1)\tan A}=0=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১০. প্রমাণ কর: $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}}$ [লব ও হরকে $\sqrt{1-\sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}}$

$= \dfrac{1-\sin A}{\cos A}$

$= \dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A - \tan A =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১১. $\tan A + \sin A = a$ এবং $\tan A - \sin A = b$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^2 - b^2 = 4\sqrt{ab}$

সমাধান: এখানে প্রদত্ত, $\tan A + \sin A = a$ এবং $\tan A - \sin A = b$

বামপক্ষ $= a^2 - b^2$

$= (\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2$

$= 4\tan A.\sin A \; [\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab]$

$= 4\sqrt{\tan^2 A.\sin^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A(1-\cos^2 A)}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \tan^2 A.\cos^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \sin^2 A} \; [\because \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}]$

$= 4\sqrt{(\tan A + \sin A)(\tan A - \sin A)}$

$= 4\sqrt{ab}$

$=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

কাজ:

ক) $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^4 A + \cos^2 A = 1$

খ) $\sin^4 A + \sin^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

উদাহরণ ১২. $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$ হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে প্রদত্ত, $\sec A + \tan A = \frac{5}{2} \dots (1)$

আমরা জানি, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

বা, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

বা, $(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A) = 1$

বা, $\frac{5}{2}(\sec A - \tan A) = 1$ [(1) হতে]

$\therefore \sec A - \tan A = \frac{2}{5}$

অনুশীলনী ৯.১

১. নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য-মিথ্যা যাচাই কর। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

ক) $\tan A$ এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম

খ) $\cot A$ হলো cot ও A এর গুণফল

গ) A এর কোন একটি মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$

ঘ) cos হলো cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ

২. $\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় কর।

৩. দেওয়া আছে, $15\cot A = 8$, $\sin A$ ও $\sec A$ এর মান বের কর।

৪. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB = 13$ সে.মি., $BC = 12$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান বের কর।

৫. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3}\sin A . \cos A = \frac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর।

প্রমাণ কর (৬—২০):

৬. ক) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

খ) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

গ) $\dfrac{1}{\sin^2 A} - \dfrac{1}{\tan^2 A} = 1$

৭. ক) $\dfrac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \dfrac{\cos A}{\sec A} = 1$

খ) $\dfrac{\sec A}{\cos A} - \dfrac{\tan A}{\cot A} = 1$

গ) $\dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

৮. ক) $\dfrac{\tan A}{1-\cot A} + \dfrac{\cot A}{1-\tan A} = \sec A . \operatorname{cosec} A + 1$

খ) $\dfrac{1}{1+\tan^2 A} + \dfrac{1}{1+\cot^2 A} = 1$

৯. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$

১০. $\tan A\sqrt{1-\sin^2 A} = \sin A$

১১. $\dfrac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

১২. $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2\sec^2 A$

১৩. $\dfrac{1}{1+\sin A} + \dfrac{1}{1-\sin A} = 2\sec^2 A$

১৪. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2\tan^2 A$

১৫. $\dfrac{\sin A}{1-\cos A} + \dfrac{1-\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$

১৬. $\dfrac{\tan A}{\sec A + 1} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A} = 0$

১৭. $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

১৮. $\dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \cdot \tan B$

১৯. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$

২০. $\sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A$

২১. $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$ হলে, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$

২২. যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর।

২৩. $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান কত?

২৪. $\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a\sin A - b\cos A}{a\sin A + b\cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

২৫. $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{x}$ হলে,

ক) $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, $\sec A = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\tan A + \cot A = \sec A . \operatorname{cosec} A$

বিশেষ কিছু কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

30°, 45° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক উপায়ে 30°, 45° ও 60° পরিমাপের কোণ আঁকতে শিখেছি। এ সকল কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রকৃত মান জ্যামিতিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়।

30° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করি, $\angle XOZ = 30^\circ$ এবং OZ বাহুতে P একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি এবং PM কে Q পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $MQ = PM$ হয়। O, Q যোগ করে Z' পর্যন্ত বর্ধিত করি।

এখন $\triangle POM$ ও $\triangle QOM$ এর মধ্যে $PM = QM$

OM সাধারণ বাহু এবং

অন্তর্ভুক্ত $\angle PMO$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle QMO = 90^\circ$

$\therefore \triangle POM \cong \triangle QOM$

অতএব, $\angle QOM = \angle POM = 30^\circ$

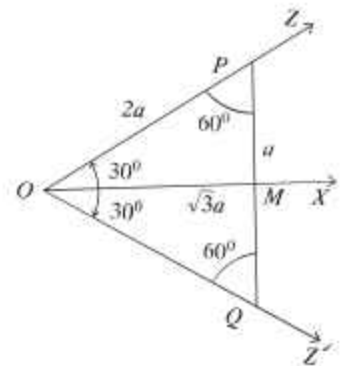
এবং $\angle OQM = \angle OPM = 60^\circ$

আবার, $\angle POQ = \angle POM + \angle QOM = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

$\therefore \triangle OPQ$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

যদি $OP = 2a$ হয়, তবে $PM = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}OP = a$ [যেহেতু $\triangle OPQ$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ]

সমকোণী $\triangle OPM$ হতে পাই,

$OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ বের করি:

$$\sin 30^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{cosec } 30^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2, \sec 30^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

একইভাবে,

$$\sin 60^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\text{cosec } 60^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2,$$

$$\cot 60^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

45° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করি, $\angle XOZ = 45^\circ$ এবং P, OZ এর উপরস্থ একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি।

$\triangle OPM$ সমকোণী ত্রিভুজে $\angle POM = 45^0$

সুতরাং, $\angle OPM = 45^0$

অতএব, $PM = OM = a$ (মনে করি)

এখন, $OP^2 = OM^2 + PM^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

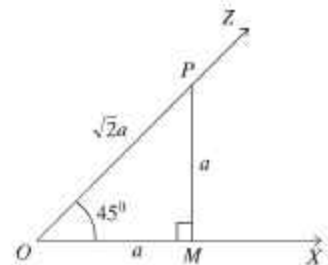
বা, $OP = \sqrt{2}a$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই,

$$\sin 45^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

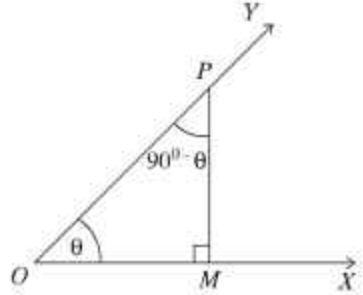
$$\tan 45^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{cosec } 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}, \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2},$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$$

পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আমরা জানি যে, দুইটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাপের সমষ্টি 90° হলে, এদের একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলা হয়। যেমন, 30° ও 60° এবং 15° ও 75° পরস্পর পূরক কোণ।

সাধারণভাবে, θ কোণ ও $(90^\circ - \theta)$ কোণ পরস্পরের পূরক কোণ।

মনে করি, $\angle XOY = \theta$ এবং P এই কোণের OY বাহুর উপর একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি।
যেহেতু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ,
অতএব, POM সমকোণী ত্রিভুজে $\angle PMO = 90^\circ$
এবং $\angle OPM + \angle POM =$ এক সমকোণ $= 90^\circ$
$\angle OPM = 90^\circ - \angle POM = 90^\circ - \theta$
[যেহেতু $\angle POM = \angle XOY = \theta$]

$$\therefore \sin(90^\circ - \theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\angle POM = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\angle POM = \sin\theta$$

$$\tan(90^0 - \theta) = \frac{OM}{PM} = \cot\angle POM = \cot\theta$$

$$\cot(90^0 - \theta) = \frac{PM}{OM} = \tan\angle POM = \tan\theta$$

$$\sec(90^0 - \theta) = \frac{OP}{PM} = \text{cosec}\angle POM = \text{cosec}\,\theta$$

$$\text{cosec}(90^0 - \theta) = \frac{OP}{OM} = \sec\angle POM = \sec\theta$$

উপরের সূত্রগুলো নিম্নলিখিতভাবে কথায় প্রকাশ করা যায়:

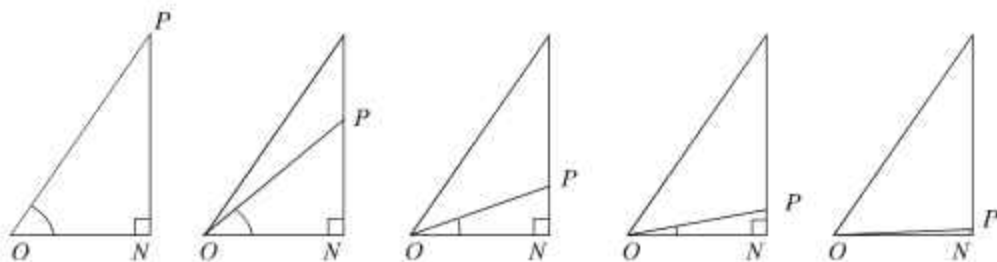
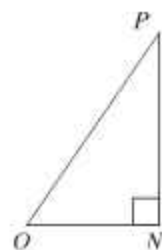
পূরক কোণের sine = কোণের cosine

পূরক কোণের cosine = কোণের sine

পূরক কোণের tangent = কোণের cotangent ইত্যাদি।

কাজ: $\sec(90^\circ - \theta) = \frac{5}{3}$ হলে, $\text{cosec}\,\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

0^0 ও 90^0 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আমরা সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ θ এর জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করতে শিখেছি। এবার দেখি, কোণটি ক্রমশঃ ছোট করা হলে ত্রিকোণমিতির অনুপাতগুলো কীরূপ হয়। θ কোণটি যতই ছোট হতে থাকে, বিপরীত বাহু PN এর দৈর্ঘ্য ততই ছোট হয়। P বিন্দুটি N বিন্দুর নিকটতর হয় এবং অবশেষে θ কোণটি যখন 0° এর খুব কাছে অবস্থিত হয়, OP প্রায় ON এর সাথে মিলে যায়।

যখন θ কোণটি 0° এর খুব নিকটে আসে PN রেখাংশের দৈর্ঘ্য শূন্যের কোঠায় নেমে আসে এবং এক্ষেত্রে $\sin\theta = \dfrac{PN}{OP}$ এর মান প্রায় শূন্য। একই সময়, θ কোণটি 0° এর খুব কাছে এলে OP এর দৈর্ঘ্য প্রায় ON এর দৈর্ঘের সমান হয় এবং $\cos\theta = \dfrac{ON}{OP}$ এর মান প্রায় 1

ত্রিকোণমিতিতে আলোচনার সুবিধার্থে 0° কোণের অবতারণা করা হয় এবং প্রমিত অবস্থানে 0° কোণের প্রান্তীয় বাহু ও আদি বাহু একই রশ্মি ধরা হয়। সুতরাং পূর্বের আলোচনার সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে বলা হয় যে, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 0^\circ = 0$

θ সূক্ষ্মকোণ হলে আমরা দেখেছি

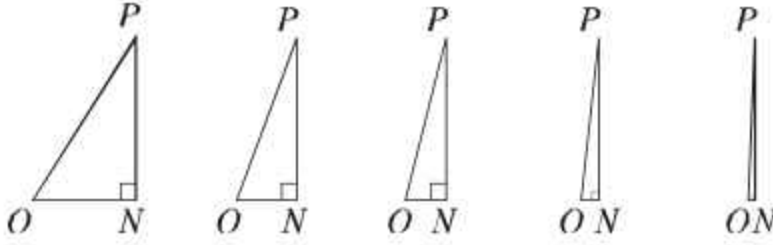
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

0° কোণের জন্য সম্ভাব্য ক্ষেত্রে এ সম্পর্কগুলো যাতে বজায় থাকে সে দিকে লক্ষ রেখে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

0 দ্বারা ভাগ করা যায় না বিধায় $\operatorname{cosec} 0^\circ$ ও $\cot 0^\circ$ সংজ্ঞায়িত করা যায় না।

আবার, যখন θ কোণটি 90° এর খুব কাছে, অতিভুজ OP প্রায় PN এর সমান। সুতরাং, $\sin\theta$ এর মান প্রায় 1। অন্যদিকে, θ কোণটি প্রায় 90^0 এর সমান হলে ON শূন্যের কাছাকাছি; $\cos\theta$ এর মান প্রায় 0।

সুতরাং, পূর্বে বর্ণিত সূত্রের সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে বলা হয় যে, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$

$$\cot 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

পূর্বের ন্যায় 0 দ্বারা ভাগ করা যায় না বিধায় $\tan 90^\circ$ ও $\sec 90^\circ$ সংজ্ঞায়িত করা যায় না।

দ্রষ্টব্য: ব্যবহারের সুবিধার্থে 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নিচের ছকে দেখানো হলো:

অনুপাত/কোণ	0°	30°	45°	60°	90°
sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cotangent	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosecant	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

লক্ষ করি: নির্ধারিত কয়েকটি কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক মানসমূহ মনে রাখার সহজ উপায়।

(i) $0, 1, 2, 3$ এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$ এবং $\sin 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়।

(ii) $4, 3, 2, 1$ এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cos 0^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos 60^\circ$ এবং $\cos 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়।

(iii) 0, 1, 3 এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\tan 0^\circ$, $\tan 30^\circ$, $\tan 45^\circ$ এবং $\tan 60^\circ$ এর মান পাওয়া যায়। (উল্লেখ্য যে, $\tan 90^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

(iv) 9, 3, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cot 30^\circ$, $\cot 45^\circ$, $\cot 60^\circ$ এবং $\cot 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়। (উল্লেখ্য যে, $\cot 0^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

উদাহরণ ১৩. মান নির্ণয় কর:

ক) $\dfrac{1-\sin^2 45^\circ}{1+\sin^2 45^\circ}+\tan^2 45^\circ$

খ) $\cot 90^\circ\cdot\tan 0^\circ\cdot\sec 30^\circ\cdot\operatorname{cosec} 60^\circ$

গ) $\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 30^\circ$

ঘ) $\dfrac{1-\tan^2 60^\circ}{1+\tan^2 60^\circ}+\sin^2 60^\circ$

সমাধান:

ক) প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{1-\sin^2 45^\circ}{1+\sin^2 45^\circ}+\tan^2 45^\circ$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+(1)^2\ [\because \sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ও } \tan 45^\circ=1]$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+1=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}+1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

খ) প্রদত্ত রাশি $=\cot 90^\circ\cdot\tan 0^\circ\cdot\sec 30^\circ\cdot\operatorname{cosec} 60^\circ$

$$=0\cdot 0\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=0$$

$[\because \cot 90^\circ=0, \tan 0^\circ=0, \sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}, \operatorname{cosec} 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}\ ]$

গ) প্রদত্ত রাশি $=\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$[\because \sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}]$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

ঘ) প্রদত্ত রাশি $= \frac{1 - \tan^2 60^\circ}{1 + \tan^2 60^\circ} + \sin^2 60^\circ$

$= \frac{1 - (\sqrt{3})^2}{1 + (\sqrt{3})^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ $[\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$= \frac{1-3}{1+3} + \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} + \frac{3}{4}$

$= \frac{-2+3}{4} = \frac{1}{4}$

উদাহরণ ১৪. ক) $\sqrt{2}\cos(A-B) = 1$, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

খ) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

গ) $A = 45^\circ$ প্রমাণ কর যে, $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$।

ঘ) সমাধান কর: $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান:

ক) $\sqrt{2}\cos(A-B) = 1$

বা, $\cos(A-B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos(A-B) = \cos 45^\circ$ $[\because \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}]$

$\therefore A - B = 45^0 \ldots (1)$

এবং $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$

বা, $\sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin(A+B) = \sin 60^\circ$ $[\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\therefore A + B = 60^0 \ldots (2)$

(1) ও (2) নং যোগ করে পাই,

$2A = 105^0$

$\therefore A = \frac{105^0}{2} = 52\frac{1^0}{2}$

আবার, (2) হতে (1) বিয়োগ করে পাই,

$2B = 15^0$

$\therefore B = \frac{15^0}{2} = 7\frac{1^0}{2}$

নির্ণেয় $A = 52\frac{1^0}{2}$ ও $B = 7\frac{1^0}{2}$

খ) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2}{-2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot A = \cot 60^\circ$

$\therefore A = 60^\circ$

গ) দেওয়া আছে, $A = 45^\circ$

প্রমাণ করতে হবে, $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

বামপক্ষ $= \cos 2A$

$= \cos(2 \times 45^\circ) = \cos 90^\circ = 0$

ডানপক্ষ $= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ} = \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2}$

$= \frac{0}{2} = 0$

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ঘ) প্রদত্ত সমীকরণ, $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

বা, $2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$

বা, $2(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) - 3(1-\sin\theta) = 0$

বা, $(1 - \sin\theta)\{2(1 + \sin\theta) - 3\} = 0$

বা, $(1 - \sin\theta)\{2\sin\theta - 1\} = 0$

$\therefore 1 - \sin\theta = 0$

বা, $\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \sin 90^0$

বা, $\theta = 90^\circ$

অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin 30^\circ$

বা, $\theta = 30^\circ$

যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ, সেহেতু, $\theta = 30^\circ$।

অনুশীলনী ৯.২

১. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে $\cot\theta$ এর মান কোনটি?

ক) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ) 1

গ) $\sqrt{3}$ ঘ) 2

২. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{3}$ হলে $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ এর মান কত?

ক) 3 খ) 2 গ) 1 ঘ) $\frac{1}{3}$

৩. $\cot(\theta - 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sin\theta =$ কত?

ক) $\frac{1}{2}$ খ) 0 গ) 1 ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

৪. $\tan(3A) = \sqrt{3}$ হলে, $A =$ কত?

ক) 45° খ) 30° গ) 20° ঘ) 15°

৫. $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ এর জন্য, $\sin\theta =$ এর সর্বোচ্চ মান কত?

ক) -1 খ) 0 গ) $\frac{1}{2}$ ঘ) 1

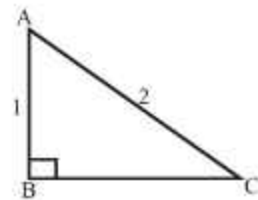
৬. ABC সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $AC = 2$, $AB = 1$

(i) $\angle ACB = 30^\circ$

(ii) $\tan A = \sqrt{3}$

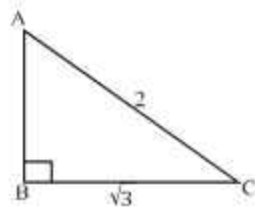
(iii) $\sin(A + C) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii গ) i ও ii ঘ) ii ও iii

৭. ABC সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $AC = 2$, $AB = 1$

(i) $\cos A = \sin C$

(ii) $\cos A + \sec A = \frac{5}{2}$

(iii) $\tan C = \frac{2}{\sqrt{3}}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

মান নির্ণয় কর (৮- ১১)

৮. $\frac{1-\cot^2 60^\circ}{1+\cot^2 60^\circ}$

৯. $\tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$

১০. $\frac{1-\cos^2 60^\circ}{1+\cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

১১. $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60^\circ \cdot \text{cosec}^2 30^\circ$

দেখাও যে, (১২- ১৭)

১২. $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

১৩. $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

১৪. $\cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$

১৫. $\sin 3A = \cos 3A$ যদি $A = 15^\circ$ হয়।

১৬. $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ যদি $A = 45^\circ$ হয়।

১৭. $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

১৮. $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45^\circ$, $B = 15^\circ$।

১৯. $\cos(A-B) = 1$, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A এবং B এর মান নির্ণয় কর।

২০. সমাধান কর: $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

২১. A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot(A+B) = 1$, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

২২. দেখাও যে, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

২৩. সমাধান কর: $\sin\theta + \cos\theta = 1$, যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

২৪. সমাধান কর: $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

২৫. সমাধান কর: $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$, θ সূক্ষ্মকোণ।

২৬. সমাধান কর: $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

২৭. মান নির্ণয় কর: $3\cot^2 60^0 + \frac{1}{4}\text{cosec}^2 30^0 + 5\sin^2 45^0 - 4\cos^2 60^0$

২৮. $\triangle ABC$ এর $\angle B = 90^0$, $AB = 5$ সে.মি., $BC = 12$ সে.মি.।

ক) AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

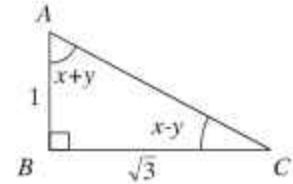
খ) $\angle C = \theta$ হলে $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\sec^2 A + \text{cosec}^2 A = \sec^2 A \;.\; \text{cosec}^2 A$

২৯. প্রদত্ত চিত্রের আলোকে

ক) AC এর পরিমাণ কত?

খ) $\tan A + \tan C$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) x ও y এর মান নির্ণয় কর।

৩০. $\sin\theta = p$, $\cos\theta = q$, $\tan\theta = r$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

ক) $r = \sqrt{(3)^{-1}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $p + q = \sqrt{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\theta = 45^0$

গ) $7p^2 + 3q^2 = 4$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

৩১. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং $AB = BC$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{BC\cos C - AC\cos B}{BC\cos B - AC\cos A} + \cos C = 0$$

৩২. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং $\cot A + \cot B = 2\cot C$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 + BC^2 = 2AB^2$।

অধ্যায় ১০

দূরত্ব ও উচ্চতা (Distance and Elevation)

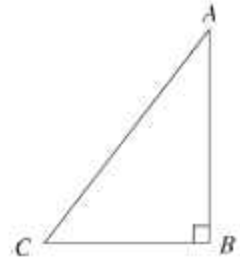
অতি প্রাচীন কাল থেকেই দূরবর্তী কোনো বস্তুর দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় করতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ করা হয়। বর্তমান যুগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ব্যবহার বেড়ে যাওয়ায় এর গুরুত্ব অপরিসীম। যে সব পাহাড়, পর্বত, টাওয়ার, গাছের উচ্চতা এবং নদ-নদীর প্রস্থ সহজে মাপা যায় না সে সব ক্ষেত্রে উচ্চতা ও প্রস্থ ত্রিকোণমিতির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। এক্ষেত্রে সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান জেনে রাখা প্রয়োজন।

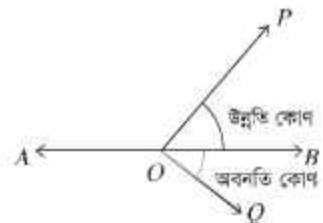
এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ভূ-রেখা, ঊর্ধ্বরেখা, উল্লম্বতল, উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে হাতে-কলমে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক বিভিন্ন পরিমাপ করতে পারবে।

ভূ-রেখা, ঊর্ধ্বরেখা এবং উল্লম্বতল (Horizontal Line, Vertical Line and Vertical Plane)

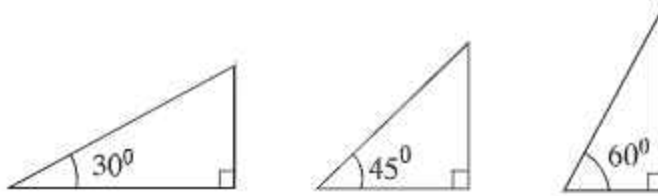
ভূ-রেখা হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যে কোনো সরলরেখা। ভূ-রেখাকে শয়নরেখাও বলা হয়। ঊর্ধ্বরেখা হচ্ছে ভূমি তলের উপর লম্ব যে কোনো সরলরেখা। একে উল্লম্ব রেখাও বলে।

ভূমি তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরচ্ছেদী ভূ-রেখা ও ঊর্ধ্বরেখা একটি তল নির্দিষ্ট করে। এ তলকে উল্লম্ব তল বলে।
চিত্রে ভূমি তলের কোনো স্থান C থেকে CB দূরত্বে AB উচ্চতা বিশিষ্ট একটি গাছ লম্ব অবস্থায় দণ্ডায়মান। এখানে CB রেখা হচ্ছে ভূ-রেখা, BA রেখা হচ্ছে ঊর্ধ্বরেখা এবং ABC তলটি ভূমির উপর লম্ব যা উল্লম্বতল।

উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ (Angle of Elevation and Angle of Depression)

চিত্রটি লক্ষ করি, ভূমির সমান্তরাল AB একটি সরলরেখা। A, O, B, P, Q বিন্দুগুলো একই উল্লম্বতলে অবস্থিত। AB সরলরেখার উপরের P বিন্দুটি AB রেখার সাথে $\angle POB$ উৎপন্ন করে। এখানে, O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর উন্নতি কোণ $\angle POB$।

সুতরাং ভূতলের উপরের কোনো বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে উন্নতি কোণ বলা হয়।
Q বিন্দু ভূ-রেখার সমান্তরাল AB রেখার নিচের দিকে অবস্থিত। এখানে, O বিন্দুর সাপেক্ষে Q বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle QOB$। সুতরাং ভূতলের সমান্তরাল রেখার নিচের কোনো বিন্দু ভূ-রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে অবনতি কোণ বলা হয়।

কাজ:

চিত্রটি চিহ্নিত কর এবং ভূ-রেখা, উর্ধ্বরেখা, উল্লম্বতল, উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ নির্দেশ কর।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: এ অধ্যায়ে সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে আনুমানিক সঠিক চিত্র আবশ্যক। চিত্র অঙ্কনের সময় নিচের কৌশল অবলম্বন করা দরকার।

১. 30° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি $>$ লম্ব হবে।

২. 45° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি $=$ লম্ব হবে।

৩. 60° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি $<$ লম্ব হবে।

উদাহরণ ১. একটি টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 75 মিটার দূরে ভূতলস্থ কোনো বিন্দুতে টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি 30° হলে, টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা $AB = h$ মিটার, টাওয়ারের পাদদেশ থেকে $BC = 75$ মিটার দূরে ভূতলস্থ C বিন্দুতে টাওয়ারের শীর্ষ A বিন্দুর উন্নতি $\angle ACB = 30^\circ$

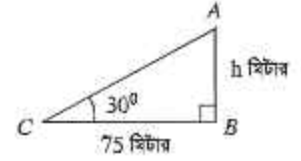
সমকোণী $\triangle ABC$ থেকে পাই, $\tan\angle ACB = \dfrac{AB}{BC}$

বা, $\tan 30^\circ = \dfrac{h}{75}$ বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{75}$ বা, $\sqrt{3}h = 75$ বা, $h = \dfrac{75}{\sqrt{3}}$

বা, $h = \dfrac{75\sqrt{3}}{3}$ [হর এবং লবকে $\sqrt{3}$ দ্বারা গুণ করে]

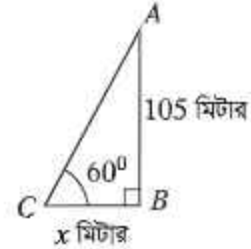
বা, $h = 25\sqrt{3}$

$\therefore h = 43.301$ (প্রায়)।

$\therefore$ টাওয়ারের উচ্চতা 43.30 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ২. একটি গাছের উচ্চতা 105 মিটার। গাছটির শীর্ষ ভূমির কোনো বিন্দুতে উন্নতি কোণ 60° তৈরি করলে, গাছটির গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, গাছের গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব $BC = x$ মিটার, গাছের উচ্চতা $AB = 105$ মিটার এবং C বিন্দুতে গাছটির শীর্ষ A বিন্দুর উন্নতি $\angle ACB = 60^\circ$

সমকোণী $\triangle ABC$ থেকে পাই, $\tan\angle ACB = \dfrac{AB}{BC}$

বা, $\tan 60^\circ = \dfrac{105}{x}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{105}{x}$ [$\because \tan 60^0 = \sqrt{3}$]

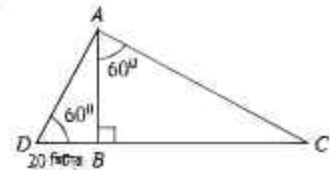
বা, $\sqrt{3}x = 105$ বা, $x = \dfrac{105}{\sqrt{3}}$ বা, $x = \dfrac{105\sqrt{3}}{3}$ বা, $x = 35\sqrt{3}$

$\therefore x = 60.622$ (প্রায়)

$\therefore$ গাছটির গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব 60.62 মিটার (প্রায়)।

কাজ: চিত্রে AB একটি গাছ। চিত্রে প্রদত্ত তত্ত্ব থেকে

ক) গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

খ) গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৩. 18 মিটার লম্বা একটি মই একটি দেওয়ালের ছাদ বরাবর ঠেস দিয়ে ভূমির সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, দেওয়ালটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার, মইটির দৈর্ঘ্য $AC = 18$ মিটার এবং ভূমির সঙ্গে $\angle ACB = 45^\circ$ উৎপন্ন করে।

$\triangle ABC$ থেকে পাই, $\sin\angle ACB = \dfrac{AB}{AC}$

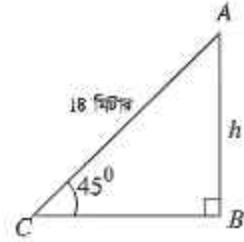
বা, $\sin 45^\circ = \dfrac{h}{18}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{h}{18}$ $\left[\because \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

বা, $\sqrt{2}h = 18$ বা, $h = \dfrac{18}{\sqrt{2}}$

বা, $h = \dfrac{18\sqrt{2}}{2}$ [হর এবং লবকে $\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $h = 12.728$ (প্রায়)

সুতরাং দেওয়ালটির উচ্চতা 12.73 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ৪. ঝড়ে একটি গাছ হেলে পড়লো। গাছের গোড়া থেকে 7 মিটার উচ্চতায় একটি খুঁটি ঠেস দিয়ে গাছটিকে সোজা করা হলো। মাটিতে খুঁটিটির স্পর্শ বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, খুঁটিটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, খুঁটিটির দৈর্ঘ্য $BC = x$ মিটার, গাছের গোড়া থেকে $AB = 7$ মিটার উচ্চতায় খুঁটিটি ঠেস দিয়ে আছে এবং অবনতি $\angle DBC = 30^\circ$

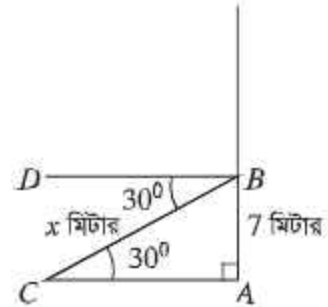
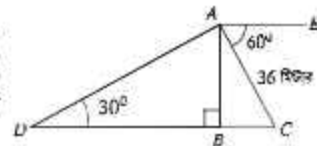
$\therefore \angle ACB = \angle DBC = 30^\circ$ [একান্তর কোণ বলে]

সমকোণী $\triangle ABC$ থেকে পাই,

$\sin\angle ACB = \dfrac{AB}{BC}$ বা, $\sin 30^\circ = \dfrac{7}{BC}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{BC}$ $\left[\because \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}\right]$

$\therefore BC = 14$

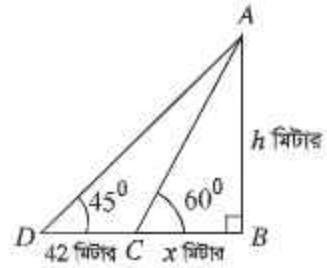
$\therefore$ খুঁটিটির দৈর্ঘ্য 14 মিটার।

কাজ:
চিত্রে অবনতি $\angle CAE = 60^0$, উন্নতি $\angle ADB = 30^0$, $AC = 36$ মিটার, $AB \perp DC$ এবং D, B, C একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে, AB, AD এবং CD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৫. ভূতলস্থ কোনো স্থানে একটি দালানের ছাদের একটি বিন্দুর উন্নতি কোণ 60^0। ঐ স্থান থেকে 42 মিটার পিছিয়ে গেলে দালানের ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45^0 হয়। দালানের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, দালানের উচ্চতা $AB = h$ মিটার এবং শীর্ষের উন্নতি $\angle ACB = 60^0$ এবং C

স্থান থেকে $CD = 42$ মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি $\angle ADB = 45^0$ হয়।
ধরি, $BC = x$ মিটার।
$\therefore BD = BC + CD = (x + 42)$ মিটার।
$\triangle ABC$ থেকে পাই,

$\tan \angle ACB = \dfrac{AB}{BC}$ বা, $\tan 60^\circ = \dfrac{h}{x}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$ $[\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}]$

$\therefore x = \dfrac{h}{\sqrt{3}} \dots (1)$

আবার, $\triangle ABD$ থেকে পাই, $\tan \angle ADB = \tan 45^\circ = \dfrac{AB}{BD}$

বা, $\tan 45^\circ = \dfrac{h}{x+42}$ বা, $1 = \dfrac{h}{x+42}$ $[\because \tan 45^0 = 1]$

বা, $h = x + 42$ বা, $h = \dfrac{h}{\sqrt{3}} + 42$ [(1) নং সমীকরণের সাহায্যে]

বা, $\sqrt{3}h = h + 42\sqrt{3}$ বা, $\sqrt{3}h - h = 42\sqrt{3}$ বা, $(\sqrt{3}-1)h = 42\sqrt{3}$ বা, $h = \dfrac{42\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

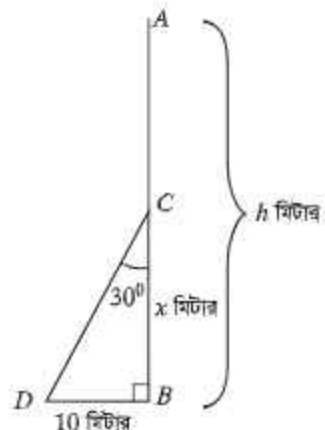
$\therefore h = 99.373$ (প্রায়)

$\therefore$ দালানটির উচ্চতা 99.37 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ৬. একটি খুঁটি এমন ভাবে ভেঙে গেল যে, তার অবিচ্ছিন্ন ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে খুঁটির গোড়া থেকে 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। খুঁটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:
মনে করি, খুঁটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য $AB = h$ মিটার, খুঁটিটি $BC = x$ মিটার উচ্চতায় ভেঙে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে $\angle BCD = 30^0$ উৎপন্ন করে খুঁটির গোড়া থেকে $BD = 10$ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে।
এখানে, $CD = AC = AB - BC = (h - x)$ মিটার
$\triangle BCD$ থেকে পাই,

$\tan \angle BCD = \dfrac{BD}{BC}$ বা, $\tan 30^\circ = \dfrac{10}{x}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{10}{x}$ $\therefore x = 10\sqrt{3}$

আবার, $\sin \angle BCD = \dfrac{BD}{CD}$ বা, $\sin 30^0 = \dfrac{BD}{CD}$ বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{10}{h-x}$

বা, $h - x = 20$ বা, $h = 20 + x$ বা, $h = 20 + 10\sqrt{3}$ [x এর মান বসিয়ে]

$\therefore h = 37.321$ (প্রায়)

$\therefore$ খুঁটির দৈর্ঘ্য 37.32 মিটার (প্রায়)।

> **কাজ:** দুইটি কিলোমিটার পোস্টের মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপরে একটি বেলুন উড়ছে। বেলুনের স্থানে ঐ কিলোমিটার পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° হলে, বেলুনটির উচ্চতা মিটারে নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ১০

১. একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্যের বর্গ তার ছায়ার দৈর্ঘ্যের বর্গের এক তৃতীয়াংশ হলে ছায়ার প্রান্ত বিন্দুতে সূর্যের উন্নতি কোণ কত?

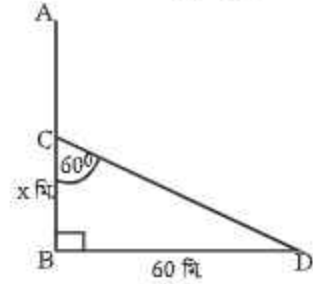
ক) 15° খ) 30° গ) 45° ঘ) 60°

২. পাশের চিত্রে x এর মান নিচের কোনটি?

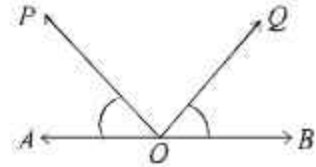
ক) $\frac{\sqrt{3}}{60}$

খ) $\frac{60}{\sqrt{3}}$

গ) $60\sqrt{2}$

ঘ) $60\sqrt{3}$

৩. পাশের চিত্রে O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ কোনটি?

ক) $\angle QOB$ খ) $\angle POA$

গ) $\angle QOA$ ঘ) $\angle POB$

৪. অবনতি কোণের মান কত ডিগ্রি হলে একটি খুঁটির দৈর্ঘ্য ও ছায়ার দৈর্ঘ্য সমান হবে?

ক) 30° খ) 45° গ) 60° ঘ) 90°

পাশের চিত্র অনুযায়ী ৫ নং - ৬ নং প্রশ্ন দুইটির উত্তর দাও।

৫. BC এর দৈর্ঘ্য হবে?

ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার খ) 4 মিটার

গ) $4\sqrt{2}$ মিটার ঘ) $4\sqrt{3}$ মিটার

৬. AB এর দৈর্ঘ্য হবে?

ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার খ) 4 মিটার

গ) $4\sqrt{2}$ মিটার ঘ) $4\sqrt{3}$ মিটার

৭. উন্নতি কোণ -

(*i*) 30° হলে, ভূমি $>$ লম্ব হবে।

(*ii*) 45° হলে ভূমি $=$ লম্ব হবে।

(*iii*) 60° হলে লম্ব $<$ ভূমি হবে।

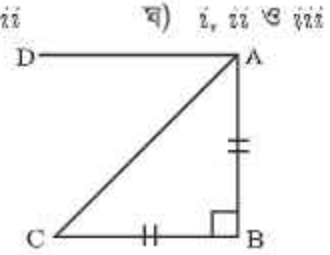
নিচের কোনটি সঠিক?

ক) *i* ও *ii* খ) *ii* ও *iii* গ) *i* ও *iii* ঘ) *i*, *ii* ও *iii*

৮. পাশের চিত্রে -

(*i*) $\angle DAC$ অবনতি কোণ

(*ii*) $\angle ACB$ উন্নতি কোণ

(*iii*) $\angle DAC = \angle ACB$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) *i* ও *ii* খ) *ii* ও *iii* গ) *i* ও *iii* ঘ) *i*, *ii* ও *iii*

৯. ভূরেখার অপর নাম কী?

ক) লম্বরেখা খ) সমান্তরাল রেখা গ) শয়ন রেখা ঘ) ঊর্ধ্বরেখা

১০. একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি 30° এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলে, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

১১. একটি গাছের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১২. 18 মিটার দৈর্ঘ্য একটি মই ভূমির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১৩. একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১৪. ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি 60°। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১৫. কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে মিনারের শীর্ষ বিন্দুর উন্নতি 45° থেকে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১৬. একটি নদীর তীর কোনো এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখল যে, ঠিক সোজাসুজি অপর তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 32 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

১৭. 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৮. একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙে গেল যে, ভাঙা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৯. একটি নদীর এক তীরে কোনো স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসুজি অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার লম্বা একটি গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°। লোকটি একটি নৌকা যোগে গাছটিকে লক্ষ্য করে যাত্রা শুরু করলো। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে লোকটি গাছ থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌছল।

ক) উপরোক্ত বর্ণনাটি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।

খ) নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

গ) লোকটির যাত্রা স্থান থেকে গন্তব্য স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

২০. 16 মিটার দীর্ঘ একটি মই লম্বভাবে দন্ডায়মান একটি দেওয়ালের ছাদ বরাবর ঠেস দিয়ে রাখা হলো। ফলে এটি ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করল।

ক) উদ্দীপক অনুসারে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র অঙ্কন কর।

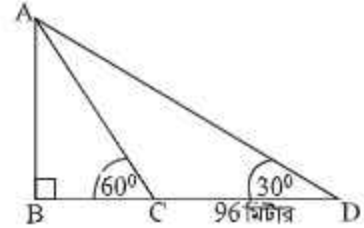
খ) দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

গ) দেওয়ালের সাথে ঠেস দিয়ে রাখা অবস্থায় মইটিকে পূর্বের অবস্থান থেকে ভূমি বরাবর আর কতদূর সরালে মইটি ভূমির সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করবে?

২১. চিত্রে, $CD = 96$ মিটার।

ক) $\angle CAD$ এর ডিগ্রি পরিমাপ নির্ণয় কর।

খ) BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ) $\triangle ACD$ এর পরিসীমা নির্ণয় কর।

অধ্যায় ১১

বীজগাণিতিক অনুপাত ও সমানুপাত (Algebraic Ratio and Proportion)

অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা থাকা আমাদের জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ। সপ্তম শ্রেণিতে পাটিগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে আমরা বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কে আলোচনা করবো। আমরা প্রতিনিয়তই নির্মাণ সামগ্রী ও বিভিন্ন প্রকার খাদ্য সামগ্রী তৈরিতে, ভোগ্যপণ্য উৎপাদনে, জমিতে সার প্রয়োগে, কোনো কিছুর আকার-আয়তন দৃষ্টিনন্দন করতে এবং দৈনন্দিন কার্যক্রমের আরও অনেক ক্ষেত্রে অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা প্রয়োগ করে থাকি। এটি ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনে অনেক সমস্যার সমাধান করা যায়।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- ▶ বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ সমানুপাত সংক্রান্ত বিভিন্ন রূপান্তর বিধি প্রয়োগ করতে পারবে।
- ▶ ধারাবাহিক অনুপাত বর্ণনা করতে পারবে।
- ▶ বাস্তব সমস্যা সমাধানে অনুপাত, সমানুপাত ও ধারাবাহিক অনুপাত ব্যবহার করতে পারবে।

অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion)

অনুপাত (Ratio)

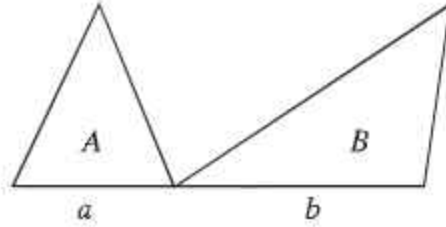
একই এককে সমজাতীয় দুইটি রাশির পরিমাণের একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তা একটি ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই ভগ্নাংশটিকে রাশি দুইটির অনুপাত বলে।

দুইটি রাশি p ও q এর অনুপাতকে $p : q = \frac{p}{q}$ লেখা হয়। p ও q রাশি দুইটি সমজাতীয় ও একই এককে প্রকাশিত হতে হবে। অনুপাতে p কে পূর্ব রাশি এবং q কে উত্তর রাশি বলা হয়।

অনেক সময় আনুমানিক পরিমাপ করতেও আমরা অনুপাত ব্যবহার করি। যেমন, সকাল ৪টায় রাস্তায় যে সংখ্যক গাড়ি থাকে, 10টায় তার দ্বিগুণ গাড়ি থাকে। এ ক্ষেত্রে অনুপাত নির্ণয়ে গাড়ির প্রকৃত সংখ্যা জানার প্রয়োজন হয় না। আবার অনেক সময় আমরা বলে থাকি, তোমার ঘরের আয়তন আমার ঘরের

আয়তনের তিনগুণ হবে। এখানেও ঘরের সঠিক আয়তন জানার প্রয়োজন হয় না। বাস্তব জীবনে এরকম অনেক ক্ষেত্রে আমরা অনুপাতের ধারণা ব্যবহার করে থাকি।

সমানুপাত (Proportion)

যদি চারটি রাশি এরূপ হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে একটি সমানুপাত উৎপন্ন হয়। a, b, c, d এরূপ চারটি রাশি হলে আমরা লিখি $a : b = c : d$। সমানুপাতের চারটি রাশিই একজাতীয় হওয়ার প্রয়োজন হয় না। প্রত্যেক অনুপাতের রাশি দুইটি এক জাতীয় হলেই চলে।

উপরের চিত্রে, দুইটি ত্রিভুজের ভূমি যথাক্রমে a ও b এবং এদের প্রত্যেকের উচ্চতা h একক। ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল A ও B বর্গএকক হলে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bh} = \frac{a}{b} \text{ বা, } A : B = a : b$$

অর্থাৎ, ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

ক্রমিক সমানুপাতী (Continued proportion)

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী বলতে বোঝায় $a : b = b : c$।

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হবে যদি এবং কেবল যদি $b^2 = ac$ হয়। ক্রমিক সমানুপাতের ক্ষেত্রে সবগুলো রাশি এক জাতীয় হতে হবে। এক্ষেত্রে c কে a ও b এর তৃতীয় সমানুপাতী এবং b কে a ও c এর মধ্যসমানুপাতী বলা হয়।

উদাহরণ ১. A ও B নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করে যথাক্রমে t_1 এবং t_2 মিনিটে। A ও B এর গড় গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, A ও B এর গড় গতিবেগ প্রতি মিনিটে যথাক্রমে v_1 মিটার ও v_2 মিটার। তাহলে, t_1 মিনিটে A অতিক্রম করে v_1t_1 মিটার এবং t_2 মিনিটে B অতিক্রম করে v_2t_2 মিটার।

প্রশ্নানুসারে, $v_1t_1 = v_2t_2 \therefore \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}$

এখানে গতিবেগের অনুপাত সময়ের ব্যস্ত অনুপাতের সমান।

কাজ:

ক) $3.5 : 5.6$ কে $1 : a$ এবং $b : 1$ আকারে প্রকাশ কর।

খ) $x : y = 5 : 6$ হলে $3x : 5y =$ কত?

অনুপাতের রূপান্তর

এখানে অনুপাতের রাশিগুলো ধনাত্মক সংখ্যা।

১. $a : b = c : d$ হলে, $b : a = d : c$ [ব্যস্তকরণ (Invertendo)]

প্রমাণ: দেওয়া আছে,

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $ad = bc$ [উভয়পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}$ [উভয় পক্ষকে ac দ্বারা ভাগ করে যেখানে a, c এর কোনটিই শূন্য নয়]

বা, $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

অর্থাৎ, $b : a = d : c$

২. $a : b = c : d$ হলে, $a : c = b : d$ [একান্তরকরণ (Alternendo)]

প্রমাণ: দেওয়া আছে,

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $ad = bc$ [উভয়পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$ [উভয় পক্ষকে cd দ্বারা ভাগ করে যেখানে c, d এর কোনোটিই শূন্য নয়]

বা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

অর্থাৎ, $a : c = b : d$

৩. $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ [যোজন (Componendo)]

প্রমাণ: দেওয়া আছে,

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

অর্থাৎ, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

৪. $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ [বিয়োজন (Dividendo)]

প্রমাণ: দেওয়া আছে,

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

অর্থাৎ, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

৫. $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ [যোজন-বিয়োজন (Componendo-Dividendo)]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

যোজন করে পাই, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \ldots (1)$

আবার বিয়োজন করে পাই, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

বা, $\frac{b}{a-b} = \frac{d}{c-d}$ [ব্যস্তকরণ করে] $\ldots (2)$

সুতরাং, $\frac{a+b}{b} \times \frac{b}{a-b} = \frac{c+d}{d} \times \frac{d}{c-d}$ [(1) ও (2) গুণ করে]

অর্থাৎ, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ [এখানে $a \neq b, c \neq d$]

৬. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে, প্রত্যেকটি অনুপাত = $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

প্রমাণ: মনে করি,

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$

$\therefore a = bk, c = dk, e = fk, g = hk$

$\therefore \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{bk+dk+fk+hk}{b+d+f+h} = \frac{k(b+d+f+h)}{b+d+f+h} = k$

কিন্তু k প্রদত্ত সমানুপাতের প্রত্যেকটি অনুপাতের সমান।

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

কাজ:

ক) মাতা ও কন্যার বর্তমান বয়সের সমষ্টি s বছর। তাদের বয়সের অনুপাত t বছর পূর্বে ছিল $r:p$। x বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

খ) একটি ল্যাম্পপোস্ট থেকে p মিটার দূরে দাঁড়ানো r মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট এক ব্যক্তির ছায়ার দৈর্ঘ্য s মিটার। ল্যাম্পপোস্টের উচ্চতা p, r ও s এর মাধ্যমে নির্ণয় কর।

উদাহরণ ২. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের অনুপাত $7:2$ এবং 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত $8:3$ হবে। তাদের বর্তমান বয়স কত?

সমাধান: মনে করি, পিতার বর্তমান বয়স a বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স b বছর।

প্রশ্নের প্রথম ও দ্বিতীয় শর্তানুসারে যথাক্রমে পাই,

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{2} \ldots (1)$$

$$\frac{a+5}{b+5} = \frac{8}{3} \ldots (2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই,

$$a = \frac{7b}{2} \ldots (3)$$

সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$$3(a+5) = 8(b+5)$$

বা, $3a + 15 = 8b + 40$

বা, $3a - 8b = 40 - 15$

বা, $3 \times \frac{7b}{2} - 8b = 25$ [(3) ব্যবহার করে]

বা, $\frac{21b - 16b}{2} = 25$

বা, $5b = 50$

$\therefore b = 10$

সমীকরণ (3) এ $b = 10$ বসিয়ে পাই, $a = \frac{7 \times 10}{2} = 35$

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স 35 বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স 10 বছর।

উদাহরণ ৩. যদি $a:b = b:c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a : b = b : c$

$\therefore b^2 = ac$

এখন, $\left(\dfrac{a+b}{b+c}\right)^2 = \dfrac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$

$= \dfrac{a^2+2ab+b^2}{b^2+2bc+c^2}$

$= \dfrac{a^2+2ab+ac}{ac+2bc+c^2}$

$= \dfrac{a(a+2b+c)}{c(a+2b+c)}$

$= \dfrac{a}{c}$

আবার, $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{a^2+ac}{ac+c^2}$

$= \dfrac{a(a+c)}{c(a+c)}$

$= \dfrac{a}{c}$

$\therefore \left(\dfrac{a+b}{b+c}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

উদাহরণ ৪. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে, $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{ac+bd}{ac-bd}$

সমাধান: মনে করি, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$

$\therefore a = bk$ এবং $c = dk$

এখন, $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{(bk)^2+b^2}{(bk)^2-b^2} = \dfrac{b^2(k^2+1)}{b^2(k^2-1)} = \dfrac{k^2+1}{k^2-1}$

এবং $\dfrac{ac+bd}{ac-bd} = \dfrac{bk\cdot dk+bd}{bk\cdot dk-bd} = \dfrac{bd(k^2+1)}{bd(k^2-1)} = \dfrac{k^2+1}{k^2-1}$

$\therefore \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{ac+bd}{ac-bd}$

উদাহরণ ৫. সমাধান কর: $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}} = 1$ যেখানে $0 < b < 2a < 2b$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}} = 1$

বা, $\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = \frac{1+ax}{1-ax}$

বা, $\frac{1+bx}{1-bx} = \frac{(1+ax)^2}{(1-ax)^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{1+bx}{1-bx} = \frac{1+2ax+a^2x^2}{1-2ax+a^2x^2}$

বা, $\frac{1+bx+1-bx}{1+bx-1+bx} = \frac{1+2ax+a^2x^2+1-2ax+a^2x^2}{1+2ax+a^2x^2-1+2ax-a^2x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2bx} = \frac{2(1+a^2x^2)}{4ax}$

বা, $2ax = bx(1+a^2x^2)$

বা, $x\{2a - b(1+a^2x^2)\} = 0$

$\therefore\ x = 0$

অথবা, $2a - b(1+a^2x^2) = 0$

বা, $b(1+a^2x^2) = 2a$

বা, $1 + a^2x^2 = \frac{2a}{b}$

বা, $a^2x^2 = \frac{2a}{b} - 1$

বা, $x^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2a}{b} - 1\right)$

$\therefore x = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$

নির্ণেয় সমাধান $x = 0. \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$

উদাহরণ ৬. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = p$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^2 - \frac{2p}{x} + 1 = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = p$

বা, $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{p+1}{p-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} = \frac{p+1}{p-1}$

২০২৫

বা, $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{p+1}{p-1}$

বা, $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{(p+1)^2}{(p-1)^2} = \dfrac{p^2+2p+1}{p^2-2p+1}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\dfrac{1+x+1-x}{1+x-1+x} = \dfrac{p^2+2p+1+p^2-2p+1}{p^2+2p+1-p^2+2p-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2}{2x} = \dfrac{2(p^2+1)}{4p}$

বা, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{p^2+1}{2p}$

বা, $p^2+1 = \dfrac{2p}{x}$

$\therefore p^2 - \dfrac{2p}{x} + 1 = 0$

উদাহরণ ৭. $\dfrac{a^3+b^3}{a-b+c} = a(a+b)$ হলে প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\dfrac{a^3+b^3}{a-b+c} = a(a+b)$

বা, $\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a-b+c} = a(a+b)$

বা, $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b+c} = a$ [উভয়পক্ষকে $(a+b)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2-ab+b^2 = a^2-ab+ac$

বা, $b^2 = ac$

$\therefore a, b, c$ ক্রমিক সমানুপাতী।

উদাহরণ ৮. যদি $\dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $c=a$ অথবা $a+b+c+d=0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{c+d}{d+a}$

বা, $\dfrac{a+b}{b+c} - 1 = \dfrac{c+d}{d+a} - 1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

বা, $\dfrac{a+b-b-c}{b+c} = \dfrac{c+d-d-a}{d+a}$

বা, $\dfrac{a-c}{b+c} = \dfrac{c-a}{d+a}$

২০২৫

বা, $\frac{a-c}{b+c}=-\frac{a-c}{d+a}$

বা, $\frac{a-c}{b+c}+\frac{a-c}{d+a}=0$

বা, $(a-c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)=0$

বা, $(a-c)\frac{(d+a+b+c)}{(b+c)(d+a)}=0$

বা, $(a-c)(d+a+b+c)=0$

বা, $a-c=0$ অথবা $d+a+b+c=0$

$\therefore\ c=a$ অথবা $a+b+c+d=0$

উদাহরণ ৯. যদি $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ এবং x, y, z সকলে পরস্পর সমান না হয়, তবে প্রমাণ কর যে, প্রতিটি অনুপাতের মান -1 অথবা $\frac{1}{2}$ এর সমান হবে।

সমাধান: মনে করি, $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=k$

$\therefore x=k(y+z)\ldots(1)$

$y=k(z+x)\ldots(2)$

$z=k(x+y)\ldots(3)$

সমীকরণ (1) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই,

$x-y=k(y-x)$ বা, $k(y-x)=-(y-x)$

$\therefore\ k=-1$

আবার, সমীকরণ $(1),(2)$ ও (3) যোগ করে পাই,

$x+y+z=k(y+z+z+x+x+y)=2k(x+y+z)$

বা, $k=\frac{(x+y+z)}{2(x+y+z)}$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাতের মান -1 অথবা $\frac{1}{2}$।

২০২৫

উদাহরণ ১০. যদি $ax=by=cz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$

সমাধান: মনে করি, $ax = by = cz = k$

$\therefore x = \frac{k}{a}, y = \frac{k}{b}, z = \frac{k}{c}$

এখন, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{k^2}{a^2} \times \frac{bc}{k^2} + \frac{k^2}{b^2} \times \frac{ca}{k^2} + \frac{k^2}{c^2} \times \frac{ab}{k^2} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$

উদাহরণ ১১. a, b, c ও d ক্রমিক সমানুপাতিক এবং $x = \frac{10pq}{p+q}$

ক) দেখাও যে, $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

খ) প্রমাণ কর যে, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

গ) $\frac{x+5p}{x-5p} + \frac{x+5q}{x-5q}$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $p \neq q$

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, $a : b = b : c$ বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ বা, $ac = b^2$

ডানপক্ষ $= \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+ac}{ac+c^2} = \frac{a(a+c)}{c(a+c)} = \frac{a}{c} =$ বামপক্ষ

$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

খ) দেওয়া আছে, a, b, c ও d ক্রমিক সমানুপাতিক

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক

$\therefore \frac{c}{d} = k$ বা, $c = dk$

$\frac{b}{c} = k$ বা, $b = ck = dk \cdot k = dk^2$

$\frac{a}{b} = k$ বা, $a = bk = dk^2 \cdot k = dk^3$

বামপক্ষ $= (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

$= \{(dk^3)^2 + (dk^2)^2 + (dk)^2\}\{(dk^2)^2 + (dk)^2 + d^2\}$

$= (d^2k^6 + d^2k^4 + d^2k^2)(d^2k^4 + d^2k^2 + d^2)$

$= d^2k^2(k^4 + k^2 + 1)d^2(k^4 + k^2 + 1)$

$= d^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

ডানপক্ষ $= (ab + bc + cd)^2$

$= (dk^3 \cdot dk^2 + dk^2 \cdot dk + dk \cdot d)^2$

$= (d^2k^5 + d^2k^3 + d^2k)^2$

$= \{d^2k(k^4 + k^2 + 1)\}^2$

$= d^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2 =$ বামপক্ষ

$\therefore\ (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

গ) দেওয়া আছে, $x = \dfrac{10pq}{p+q}$

বা, $\dfrac{x}{5p} = \dfrac{2q}{p+q}$

বা, $\dfrac{x+5p}{x-5p} = \dfrac{2q+p+q}{2q-p-q}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{x+5p}{x-5p} = \dfrac{p+3q}{q-p} \ldots (1)$

আবার, $x = \dfrac{10pq}{p+q}$

বা, $\dfrac{x}{5q} = \dfrac{2p}{p+q}$

বা, $\dfrac{x+5q}{x-5q} = \dfrac{2p+p+q}{2p-p-q}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{x+5q}{x-5q} = \dfrac{3p+q}{p-q} \ldots (2)$

এখন (1) ও (2) নং যোগ করে পাই,

$$\frac{x+5p}{x-5p} + \frac{x+5q}{x-5q} = \frac{p+3q}{q-p} + \frac{3p+q}{p-q} = \frac{p+3q}{q-p} - \frac{3p+q}{q-p}$$

$$= \frac{p+3q-3p-q}{q-p} = \frac{2q-2p}{q-p} = \frac{2(q-p)}{q-p} = 2 \quad [\because q-p \neq 0]$$

অনুশীলনী ১১.১

১. দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার এবং b মিটার হলে, এদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

২. একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, এদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর।

৩. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3:4$ এবং এদের ল.সা.গু. 180। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

৪. একদিন তোমাদের ক্লাসে দেখা গেল অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থী সংখ্যার অনুপাত $1:4$, অনুপস্থিত শিক্ষার্থী সংখ্যাকে মোট শিক্ষার্থী সংখ্যার শতকরায় প্রকাশ কর।

৫. একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হলো। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

৬. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। 7 বছর পূর্বে তাদের বয়সের অনুপাত ছিল $5:2$। 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

৭. যদি $a:b=b:c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

ক) $\dfrac{a}{c}=\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

খ) $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

গ) $\dfrac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}=1$

৮. সমাধান কর:

ক) $\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{3}$

খ) $\dfrac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{b}{x},\ 2a>b>0$ এবং $x\neq 0$

গ) $81\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^3=\dfrac{1+x}{1-x}$

৯. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে,

ক) $\dfrac{a^3+b^3}{b^3+c^3}=\dfrac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$

খ) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

১০. $x = \frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2,\ a \neq b$

১১. $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$

১২. $x = \frac{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b}}$ হলে, দেখাও যে, $3bx^2 - 4ax + 3b = 0$

১৩. $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে, দেখাও যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

১৪. $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$।

১৫. $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$।

১৬. $\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a+b+c \neq 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = b = c$

১৭. $\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z \neq 0$ হলে, দেখাও যে, প্রতিটি অনুপাত $= \frac{1}{a+b+c}$।

১৮. যদি $(a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r = (a+b-c)s$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$।

১৯. যদি $lx = my = nz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$।

২০. যদি $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$।

ধারাবাহিক অনুপাত (Continued Ratio)

মনে কর, রনির আয় 1000 টাকা, সনির আয় 1500 টাকা এবং সামির আয় 2500 টাকা। এখানে, রনির আয় : সনির আয় $= 1000 : 1500 = 2 : 3$; সনির আয় : সামির আয় $= 1500 : 2500 = 3 : 5$। সুতরাং রনির আয় : সনির আয় : সামির আয় $= 2 : 3 : 5$।

দুইটি অনুপাত যদি ক : খ এবং খ : গ আকারের হয়, তাহলে এদেরকে সাধারণত ক : খ : গ আকারে লেখা যায়। একে ধারবাহিক অনুপাত বলা হয়। যেকোনো দুই বা ততোধিক অনুপাতকে এই আকারে

প্রকাশ করা যায়। এখানে লক্ষণীয় যে, দুইটি অনুপাতকে ক : খ : গ আকারে প্রকাশ করতে হলে প্রথম অনুপাতটির উত্তর রাশি, দ্বিতীয় অনুপাতটির পূর্ব রাশির সমান হতে হবে। যেমন, $2:3$ এবং $4:3$ অনুপাত দুইটি ক : খ : গ আকারে প্রকাশ করতে হলে প্রথম অনুপাতটির উত্তর রাশিটিকে দ্বিতীয় অনুপাতটির পূর্ব রাশির সমান করতে হবে। অর্থাৎ ঐ দুইটি রাশিকে এদের ল.সা.গু. এর সমান করতে হবে।

এখানে, $3, 4$ এর ল.সা.গু. 12

এখন, $2:3=\frac{2}{3}=\frac{2\times 4}{3\times 4}=\frac{8}{12}=8:12$

আবার, $4:3=\frac{4}{3}=\frac{4\times 3}{3\times 3}=\frac{12}{9}=12:9$

অতএব $2:3$ এবং $4:3$ অনুপাত দুইটি ক : খ : গ আকারে হবে $8:12:9$

লক্ষ করি যে, উপরের উদাহরণে সামির আয় যদি 1125 টাকা হয়, তাহলে তাদের আয়ের অনুপাতও $8:12:9$ আকারে লেখা যাবে।

উদাহরণ ১২. ক, খ ও গ এক জাতীয় রাশি এবং ক : খ = $3:4$, খ : গ = $6:7$ হলে, ক : খ : গ কত?

সমাধান: ক : খ $=\frac{3}{4}=\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{9}{12}$ এবং খ : গ $=\frac{6}{7}=\frac{6\times 2}{7\times 2}=\frac{12}{14}$ [এখানে 4 ও 6 এর ল. সা. গু. 12]

$\therefore$ ক : খ : গ = $9:12:14$

উদাহরণ ১৩. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $3:4:5$, কোণ তিনটি ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত অনুপাত অনুসারে কোণ তিনটি যথাক্রমে $3x$, $4x$ এবং $5x$। ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = 180°।

প্রশ্নানুসারে, $3x+4x+5x=180^\circ$ বা, $12x=180^\circ$ বা, $x=15^\circ$

অতএব, কোণ তিনটি হল,

$3x=3\times 15^\circ=45^\circ$

$4x=4\times 15^\circ=60^\circ$

এবং $5x=5\times 15^\circ=75^\circ$

উদাহরণ ১৪. যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ 10% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান: মনে করি, বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a মিটার। সুতরাং, বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল a^2 বর্গমিটার। 10% বৃদ্ধি পেলে প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য হয় ($a+a$ এর 10%) মিটার বা $1.10a$ মিটার।

তখন, বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $(1.10a)^2$ বর্গমিটার বা $1.21a^2$ বর্গমিটার

ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় $(1.21a^2 - a^2) = 0.21a^2$ বর্গমিটার

$\therefore$ ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পাবে $\dfrac{0.21a^2}{a^2} \times 100\% = 21\%$

কাজ:

ক) তোমার শ্রেণিতে 35 জন ছাত্র ও 25 জন ছাত্রী আছে। বনভোজনে খিচুড়ি খাওয়ার জন্য প্রত্যেক ছাত্র ও ছাত্রীর প্রদত্ত চাল ও ডালের অনুপাত যথাক্রমে $3:1$ এবং $5:2$ হলে, মোট চাল ও মোট ডালের অনুপাত বের কর।

খ) একজন কৃষকের জমিতে উৎপাদিত মসুর, সরিষা ও ধানের পরিমাণ যথাক্রমে 75 কে.জি., 100 কে.জি. এবং 525 কে.জি.। ফসলগুলো যথাক্রমে 100, 120 ও 30 টাকা করে বিক্রি করলো। সব ফসল বিক্রি করার পর ঐগুলো হতে প্রাপ্ত আয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমানুপাতিক ভাগ

কোনো রাশিকে নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করাকে সমানুপাতিক ভাগ বলা হয়। S কে $a:b:c:d$ অনুপাতে ভাগ করতে হলে, S কে মোট $a+b+c+d$ ভাগ করে যথাক্রমে a, b, c ও d ভাগ নিতে হয়। অতএব,

১ম অংশ $= S$ এর $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{Sa}{a+b+c+d}$

২য় অংশ $= S$ এর $\dfrac{b}{a+b+c+d} = \dfrac{Sb}{a+b+c+d}$

৩য় অংশ $= S$ এর $\dfrac{c}{a+b+c+d} = \dfrac{Sc}{a+b+c+d}$

৪র্থ অংশ $= S$ এর $\dfrac{d}{a+b+c+d} = \dfrac{Sd}{a+b+c+d}$

এভাবে যেকোনো রাশিকে যেকোনো নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করা যায়।

উদাহরণ ১৫. একটি আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল 12 হেক্টর এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 500 মিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে $3:4$ এবং $2:3$।

ক) প্রদত্ত আয়তাকার জমিটির ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?

খ) অপর জমিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) প্রদত্ত জমিটির প্রস্থ নির্ণয় কর।

২০২৫

সমাধান:

ক) আমরা জানি, 1 হেক্টর $= 10,000$ বর্গমিটার

$\therefore$ 12 হেক্টর $= 12 \times 10,000 = 120000$ বর্গমিটার

খ) দেওয়া আছে, প্রদত্ত জমির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে $3:4$ এবং $2:3$।

মনে করি, প্রদত্ত জমির দৈর্ঘ্য $3x$ মিটার এবং প্রস্থ $2y$ মিটার।

সুতরাং, অপর জমির দৈর্ঘ্য $4x$ মিটার এবং প্রস্থ $3y$ মিটার।

$\therefore$ প্রদত্ত জমির ক্ষেত্রফল $= 3x \cdot 2y = 6xy$ বর্গমিটার

এবং অপর জমির ক্ষেত্রফল $= 4x \cdot 3y = 12xy$ বর্গমিটার

প্রশ্নমতে, $6xy = 120000$ বা, $xy = 20000$

$\therefore$ অপর জমির ক্ষেত্রফল $= 12xy = 12 \times 20000 = 240000$ বর্গমিটার

গ) মনে করি, প্রদত্ত জমির দৈর্ঘ্য $3x$ মিটার এবং প্রস্থ $2y$ মিটার।

সুতরাং, জমিটির একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য $\sqrt{(3x)^2 + (2y)^2}$ মিটার

(খ) থেকে পাই, $xy = 20000$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(3x)^2 + (2y)^2} = 500$

বা, $9x^2 + 4y^2 = 250000$

বা, $(3x + 2y)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y = 250000$

বা, $(3x + 2y)^2 - 12xy = 250000$

বা, $(3x + 2y)^2 - 12 \times 20000 = 250000$

বা, $(3x + 2y)^2 = 250000 + 240000$

বা, $(3x + 2y)^2 = 490000$

বা, $3x + 2y = 700 \cdots (1)$

আবার, $(3x - 2y)^2 = (3x + 2y)^2 - 4 \cdot 3x \cdot 2y$

বা, $(3x - 2y)^2 = (3x + 2y)^2 - 24xy$

বা, $(3x - 2y)^2 = (700)^2 - 24 \times 20000$

বা, $(3x - 2y)^2 = 490000 - 480000$

বা, $(3x - 2y)^2 = 10000$

বা, $3x - 2y = 100 \ldots (2)$

(1) নং থেকে (2) নং বিয়োগ করে পাই,

$4y = 600$ বা, $y = 150$

$\therefore$ প্রদত্ত জমিটির প্রস্থ $2y = 2 \times 150 = 300$ মিটার।

অনুশীলনী ১১.২

১. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতিক হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $a^2 = bc$ খ) $b^2 = ac$

গ) $ab = bc$ ঘ) $a = b = c$

২. আরিফ ও আকিবের বয়সের অনুপাত $5 : 3$, আরিফের বয়স 20 বছর হলে, কত বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত $7 : 5$ হবে?

ক) 5 বছর খ) 6 বছর

গ) 8 বছর ঘ) 10 বছর

৩. একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে তার ক্ষেত্রফল কতগুণ বৃদ্ধি পাবে?

ক) 2 গুণ খ) 3 গুণ

গ) 4 গুণ ঘ) 6 গুণ

৪. $x : y = 7 : 5$, $y : z = 5 : 7$ হলে $x : z =$ কত?

ক) $35 : 49$ খ) $35 : 35$

গ) $25 : 49$ ঘ) $49 : 25$

৫. b, a, c ক্রমিক সমানুপাতিক হলে

(i) $a^2 = bc$

(ii) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{a}$

(iii) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+a}{c-a}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) i ও ii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

৬. $x : y = 2 : 1$ এবং $y : z = 2 : 1$ হলে

(i) x, y, z ক্রমিক সমানুপাতিক

(ii) $z : x = 1 : 4$

(iii) $y^2 + zx = 4yz$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৭. $\frac{a}{x} = \frac{m^2+n^2}{2mn}$ হলে, $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} =$ কত?

ক) $\frac{m}{n}$ খ) $\frac{m+n}{m-n}$ গ) $\frac{m-n}{m+n}$ ঘ) $\frac{n}{m}$

একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 36 সে.মি. এবং বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 হলে, নিচের ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৮. ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক) 5 খ) 9 গ) 12 ঘ) 15

৯. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক) 6 খ) 54 গ) 67 ঘ) 90

১০. 1 ঘন সে.মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম। কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা কত ভাগ?

১১. ক, খ, গ, ঘ এর মধ্যে 300 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন, ক এর অংশ : খ এর অংশ = 2 : 3, খ এর অংশ : গ এর অংশ = 1 : 2 এবং গ এর অংশ : ঘ এর অংশ = 3 : 2 হয়।

১২. তিনজন জেলে 690 টি মাছ ধরেছে। তাদের অংশের অনুপাত $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ এবং $\frac{5}{6}$ হলে, কে কয়টি মাছ পেল?

১৩. একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 45 সে.মি.। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 5 : 7 হলে, প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ নির্ণয় কর।

১৪. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 7 এবং এদের গ.সা.গু. 4 হলে, সংখ্যা দুইটির ল.সা.গু. কত?

১৫. ক্রিকেট খেলায় সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফী 171 রান করলো। সাকিব ও মুশফিকুরের এবং মুশফিকুর ও মাশরাফীর রানের অনুপাত 3 : 2 হলে কে কত রান করেছে?

১৬. একটি অফিসে 2 জন কর্মকর্তা, 7 জন অফিস সহকারী এবং 3 জন অফিস সহায়ক আছে। একজন অফিস সহায়ক 1 টাকা পেলে একজন অফিস সহকারী পায় 2 টাকা, একজন কর্মকর্তা পায় 4 টাকা। তাদের সকলের মোট বেতন 150,000 টাকা হলে, কে কত বেতন পায়?

১৭. যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 20% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

১৮. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 10% হ্রাস পেলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?

১৯. একটি মাঠের জমিতে সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত 4 : 7। ঐ মাঠে যে জমিতে আগে 304 কুইন্টাল ধান ফলতো, সেচ পাওয়ার পরে তার ফলন কত হবে?

২০. ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত 3 : 2 এবং গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত 4 : 3 হলে, সমান পরিমাণের ধান ও গম থেকে উৎপন্ন চাল ও সুজির অনুপাত বের কর।

২১. একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে $3 : 4$ এবং $2 : 5$ হলে, অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

২২. জেমি ও সিমি একই ব্যাংক থেকে একই দিনে 10% সরল মুনাফায় আলাদা আলাদা পরিমাণ অর্থ ঋণ নেয়। জেমি 2 বছর পর মুনাফা-আসলে যত টাকা শোধ করে 3 বছর পর সিমি মুনাফা-আসলে তত টাকা শোধ করে। তাদের ঋণের অনুপাত নির্ণয় কর।

২৩. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত $5 : 12 : 13$ এবং পরিসীমা 30 সে.মি.

ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং কোণ ভেদে ত্রিভুজটি কী ধরনের তা লেখ।

খ) বৃহত্তর বাহুকে দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) উক্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% এবং প্রস্থ 20% বৃদ্ধি পেলে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

২৪. একদিন কোনো ক্লাসে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত $1 : 4$

ক) অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদেরকে মোট শিক্ষার্থীর শতকরায় প্রকাশ কর।

খ) 5 জন শিক্ষার্থীর বেশি উপস্থিত হলে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত হতো $1 : 9$। মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

গ) মোট শিক্ষার্থীর মধ্যে ছাত্র সংখ্যা ছাত্রী সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 10 জন কম। ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর।

২৫. আশিক, মিজান, অনিকা ও অহনা মোট 132500 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে এবং এক বছর শেষে 26500 টাকা লাভ হয়। উক্ত ব্যবসায় মূলধনে আশিকের অংশ : মিজানের অংশ $= 2 : 3$, মিজানের অংশ : অনিকার অংশ $= 4 : 5$ এবং অনিকার অংশ : অহনার অংশ $= 5 : 6$

ক) মূলধনের সরল অনুপাত নির্ণয় কর।

খ) উক্ত ব্যবসায় প্রত্যেকের মূলধন নির্ণয় কর।

গ) বছর শেষে লভ্যাংশের 60% উক্ত ব্যবসায় বিনিয়োগ করা হলো। অবশিষ্ট লভ্যাংশ মূলধনের সরল অনুপাতে বিভক্ত হলে অহনা ও আশিকের লভ্যাংশের মধ্যে কে কত টাকা বেশি লাভ পাবে?

অধ্যায় ১২

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ

(Simple Simultaneous Equations in Two Variables)

[এই অধ্যায়ের প্রয়োজনীয় পূর্বজ্ঞান বইয়ের শেষে পরিশিষ্ট অংশে সংযুক্ত আছে। প্রথমে পরিশিষ্ট অংশ পাঠ/আলোচনা করতে হবে।]

গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগণিতের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হলো সমীকরণ। দাখিল ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণিতে আমরা সরল সমীকরণের ধারণা পেয়েছি এবং কীভাবে এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ সমাধান করতে হয় তা জেনেছি। দাখিল অষ্টম শ্রেণিতে সরল সমীকরণ প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতিতে এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করেছি। কীভাবে বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সরল সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করা হয় তাও শিখেছি। এ অধ্যায়ে সরল সহসমীকরণের ধারণা সম্প্রসারণ করা হয়েছে ও সমাধানের আরো নতুন পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এ ছাড়াও এ অধ্যায়ে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান ও বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ► দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সঙ্গতি যাচাই করতে পারবে।
- ► দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণের পরস্পর নির্ভরশীলতা যাচাই করতে পারবে।
- ► সমাধানের আড়গুণন পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ► বাস্তবভিত্তিক গাণিতিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- ► লেখচিত্রের সাহায্যে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধান করতে পারবে।

সরল সহসমীকরণ

সরল সহসমীকরণ বলতে দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সরল সমীকরণকে বুঝায় যখন এদের একত্রে উপস্থাপন করা হয় এবং চলক দুইটি একই বৈশিষ্ট্যের হয়। আবার এরূপ দুইটি সমীকরণকে একত্রে সরল সমীকরণজোটও বলে। অষ্টম শ্রেণিতে আমরা এরূপ সমীকরণজোটের সমাধান করেছি ও বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে শিখেছি। এ অধ্যায়ে এ সম্পর্কে আরো বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

প্রথমে আমরা $2x + y = 12$ সমীকরণটি বিবেচনা করি। এটি একটি দুই চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ। সমীকরণটিতে বামপক্ষে x ও y এর এমন মান পাওয়া যাবে কি যাদের প্রথমটির দ্বিগুণের সাথে দ্বিতীয়টির

যোগফল ডানপক্ষের 12 এর সমান হয়, অর্থাৎ ঐ মান দুইটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়?

এখন, $2x + y = 12$ সমীকরণটি থেকে নিচের ছকটি পূরণ করি:

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ $(2x + y)$ এর মান	ডানপক্ষ
-2	16	$-4 + 16 = 12$	12
0	12	$0 + 12 = 12$	12
3	6	$6 + 6 = 12$	12
5	2	$10 + 2 = 12$	12
...	...	$\ldots = 12$	12

সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। তার মধ্যে চারটি সমাধান: $(-2, 16)$, $(0, 12)$, $(3. 6)$, $(5, 2)$।

আবার, অন্য একটি সমীকরণ $x - y = 3$ নিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করি:

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ $(x - y)$ এর মান	ডানপক্ষ
-2	-5	$-2 + 5 = 3$	3
0	-3	$0 + 3 = 3$	3
3	0	$3 - 0 = 3$	3
5	2	$5 - 2 = 3$	3
...	...	$\ldots = 3$	3

সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। তার মধ্যে চারটি সমাধান: $(-2, -5)$, $(0, -3)$, $(3. 0)$, $(5, 2)$।

যদি আলোচ্য সমীকরণ দুইটিকে একত্রে জোট হিসেবে ধরা হয়, তবে একমাত্র $(5, 2)$ দ্বারা উভয় সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হয়। আর অন্য কোনো মান দ্বারা উভয় সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হবে না।

অতএব, সমীকরণজোট $2x + y = 12$ এবং $x - y = 3$ এর সমাধান: $(x, y) = (5, 2)$

কাজ: $x - 2y + 1 = 0$ ও $2x + y - 3 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের প্রত্যেকটির পাঁচটি করে সমাধান লিখ যেন তন্মধ্যে সাধারণ সমাধানটিও থাকে।

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা

ক) পূর্বের আলোচিত সমীকরণজোট $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 12 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$ এর অনন্য (একটি মাত্র) সমাধান পাওয়া গেছে। এরূপ সমীকরণজোটকে সমঞ্জস্য (consistent) বলা হয়। সমীকরণ দুইটির x ও y এর সহগ তুলনা করে (সহগের অনুপাত নিয়ে) পাই, $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$, সমীকরণজোটটির একটি সমীকরণকে অন্যটির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় না। এ জন্য এরূপ সমীকরণকে পরস্পর অনির্ভরশীল (independent) সমীকরণজোট বলা হয়।

সমঞ্জস্য ও পরস্পর অনির্ভরশীল সমীকরণজোটের ক্ষেত্রে অনুপাতগুলো সমান নয়। এক্ষেত্রে ধ্রুবকপদ তুলনা করার প্রয়োজন হয় না।

খ) এখন আমরা $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ 4x - 2y &= 12 \end{aligned}\right\}$ সমীকরণজোটটি বিবেচনা করি। এই দুইটি সমীকরণ সমাধান করা যাবে কি?

এখানে, ১ম সমীকরণটির উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করলে ২য় সমীকরণটি পাওয়া যাবে। আবার, ২য় সমীকরণের উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করলে ১ম সমীকরণটি পাওয়া যাবে। অর্থাৎ, সমীকরণ দুইটি পরস্পর নির্ভরশীল।

আমরা জানি, ১ম সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। কাজেই, ২য় সমীকরণটিরও ঐ একই অসংখ্য সমাধান আছে। এরূপ সমীকরণজোটকে সমঞ্জস্য ও পরস্পর নির্ভরশীল (dependent) সমীকরণজোট বলে। এরূপ সমীকরণজোটের অসংখ্য সমাধান আছে।

এখানে, সমীকরণ দুইটির x ও y এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে পাই, $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{6}{12}\left(= \frac{1}{2}\right)$

অর্থাৎ, সমঞ্জস্য ও পরস্পর নির্ভরশীল সমীকরণজোটের ক্ষেত্রে অনুপাতগুলো সমান হয়।

গ) এবারে আমরা $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 12 \\ 4x + 2y &= 5 \end{aligned}\right\}$ সমীকরণজোটটি সমাধান করার চেষ্টা করি।

এখানে, ১ম সমীকরণটির উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে পাই, $4x + 2y = 24$

২য় সমীকরণটি, $4x + 2y = 5$

বিয়োগ করে পাই, $0 = 19$ যা অসম্ভব।

কাজেই বলতে পারি, এ ধরনের সমীকরণজোট সমাধান করা সম্ভব নয়। এরূপ সমীকরণজোট অসমঞ্জস্য (inconsistent) ও পরস্পর অনির্ভরশীল। এরূপ সমীকরণজোটের কোনো সমাধান নেই।

এখানে সমীকরণ দুইটির x ও y এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে পাই, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{12}{5}$

অর্থাৎ, অসমঞ্জস্য ও পরস্পর অনির্ভরশীল সমীকরণজোটের ক্ষেত্রে চলকের সহগের অনুপাতগুলো ধ্রুবকের অনুপাতের সমান নয়।

সাধারণভাবে, $\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\}$ সমীকরণজোটটি নিয়ে নিচের ছকের মাধ্যমে দুইটি সরল সমীকরণের সমাধান যোগ্যতার শর্ত উল্লেখ করা হলো:

	সমীকরণজোট	সহগ ও ধ্রুবক পদ তুলনা	সমঞ্জস্য/ অসমঞ্জস্য	পরস্পর নির্ভরশীল/ অনির্ভরশীল	সমাধান আছে (কয়টি)/নেই
(i)	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	সমঞ্জস্য	অনির্ভরশীল	আছে (একটিমাত্র)
(ii)	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	সমঞ্জস্য	নির্ভরশীল	আছে (অসংখ্য)
(iii)	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	অসমঞ্জস্য	অনির্ভরশীল	নেই

এখন, যদি কোনো সমীকরণজোটে উভয় সমীকরণে ধ্রুবক পদ না থাকে, অর্থাৎ, $c_1 = c_2 = 0$ হয়, তবে ছকের

(i) অনুযায়ী $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হলে, সমীকরণজোট সর্বদা সমঞ্জস্য ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সেক্ষেত্রে একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান থাকবে।

(ii) অনুযায়ী $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ হলে, সমীকরণজোট সমঞ্জস্য ও পরস্পর নির্ভরশীল। সেক্ষেত্রে অসংখ্য সমাধান থাকবে।

উদাহরণ ১. নিচের সমীকরণজোটগুলো সমঞ্জস্য/অসমঞ্জস্য, নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না ব্যাখ্যা কর এবং এদের সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর।

ক) $x + 3y = 1$, $2x + 6y = 2$

খ) $2x - 5y = 3$, $x + 3y = 1$

গ) $3x - 5y = 7$, $6x - 10y = 15$

সমাধান:

ক) প্রদত্ত সমীকরণজোট: $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 2 \end{array}\right\}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$

ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

অতএব, সমীকরণজোটটি সমঞ্জস্য ও পরস্পর নির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির অসংখ্য সমাধান আছে।

খ) প্রদত্ত সমীকরণজোট: $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{array}\right\}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{2}{1}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-5}{3}$

আমরা পাই, $\frac{2}{1} \neq \frac{-5}{3}$

$\therefore$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস্য ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

গ) প্রদত্ত সমীকরণজোট: $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 7 \\ 6x - 10y = 15 \end{array}\right\}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-5}{-10}$ বা $\frac{1}{2}$

ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{7}{15}$

আমরা পাই, $\frac{3}{6} = \frac{-5}{-10} \neq \frac{7}{15}$

$\therefore$ সমীকরণজোটটি অসমঞ্জস্য ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির কোনো সমাধান নেই।

কাজ: $x - 2y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস্য কি না, পরস্পর নির্ভরশীল কি না যাচাই কর এবং সমীকরণজোটটির কয়টি সমাধান থাকতে পারে তা নির্দেশ কর।

অনুশীলনী ১২.১

নিচের সরল সহসমীকরণগুলো সমঞ্জস্য/অসমঞ্জস্য, পরস্পর নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না যুক্তিসহ উল্লেখ কর এবং এগুলোর সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর:

১. $x - y = 4$
$x + y = 10$

২. $2x + y = 3$
$4x + 2y = 6$

৩. $x - y - 4 = 0$
$3x - 3y - 10 = 0$

৪. $3x + 2y = 0$
$6x + 4y = 0$

৫. $3x + 2y = 0$
$9x - 6y = 0$

৬. $5x - 2y - 16 = 0$
$3x - \frac{6}{5}y = 2$

৭. $-\frac{1}{2}x + y = -1$
$x - 2y = 2$

৮. $-\frac{1}{2}x - y = 0$
$x - 2y = 0$

৯. $-\frac{1}{2}x + y = -1$
$x + y = 5$

১০. $ax - cy = 0$
$cx - ay = c^2 - a^2$

সরল সহসমীকরণের সমাধান

আমরা শুধু সমঞ্জস্য ও পরস্পর অনির্ভরশীল সরল সহসমীকরণের সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করবো। এরূপ সমীকরণজোটের একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

এখানে, সমাধানের চারটি পদ্ধতির উল্লেখ করা হলো:

১. প্রতিস্থাপন পদ্ধতি ২. অপনয়ন পদ্ধতি ৩. আড়গুণন পদ্ধতি ও ৪. লৈখিক পদ্ধতি।

আমরা অষ্টম শ্রেণিতে প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কীভাবে করতে হয় জেনেছি। এ দুই পদ্ধতির একটি করে উদাহরণ দেওয়া হলো:

উদাহরণ ২. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$2x + y = 8$$
$$3x - 2y = 5$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$$2x + y = 8 \ldots (1)$$
$$3x - 2y = 5 \ldots (2)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই, $y = 8 - 2x \ldots (3)$

সমীকরণ (2) এ y এর মান $8 - 2x$ বসিয়ে পাই,

$3x - 2(8 - 2x) = 5$

বা, $3x - 16 + 4x = 5$

বা, $7x = 5 + 16$

বা, $7x = 21$

বা, $x = 3$

x এর মান সমীকরণ (3) এ বসিয়ে পাই,

$y = 8 - 2 \times 3$

বা, $y = 8 - 6$

বা, $y = 2$

$\therefore$ সমাধান $(x, y) = (3, 2)$

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Substitution method): সুবিধামত একটি সমীকরণ থেকে একটি চলকের মান অপর চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করে প্রাপ্ত মান অপর সমীকরণে বসালে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ পাওয়া যায়। অতঃপর সমীকরণটি সমাধান করে চলকটির মান পাওয়া যায়। এই মান প্রদত্ত সমীকরণের যে কোনোটিতে বসানো যেতে পারে। তবে যেখানে একটি চলককে অপর চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়েছে সেখানে বসালে সমাধান সহজ হয়। এখান থেকে অপর চলকের মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৩. অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$2x + y = 8$$
$$3x - 2y = 5$$

দ্রষ্টব্য: প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতির পার্থক্য বুঝাতেই উদাহরণ ২ এর সমীকরণদ্বয়ই উদাহরণ ৩ এ নেওয়া হলো।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$$2x + y = 8 \ldots (1)$$
$$3x - 2y = 5 \ldots (2)$$

সমীকরণ (1) এর উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে, $4x + 2y = 16 \ldots (3)$

সমীকরণ (2) ও (3) যোগ করে পাই,

$7x = 21$

বা, $x = 3$

x এর মান সমীকরণ (1) এ বসিয়ে পাই,

$2 \times 3 + y = 8$

বা, $y = 8 - 6$

বা, $y = 2$

$\therefore$ সমাধান $(x, y) = (3, 2)$

অপনয়ন পদ্ধতি (Elimination method): সুবিধামত একটি সমীকরণকে বা উভয় সমীকরণকে এরূপ সংখ্যা দিয়ে গুণ করতে হবে যেন গুণনের পর উভয় সমীকরণের যেকোনো একটি চলকের

সহগের পরমমান সমান হয়। এরপর প্রয়োজনমত সমীকরণ দুইটিকে যোগ বা বিয়োগ করলে সহগ সমানকৃত চলকটি অপনীত বা অপসারিত হয়। তারপর সমীকরণটি সমাধান করলে বিদ্যমান চলকটির মান পাওয়া যায়। ঐ মান সুবিধামতো প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের যেকোনোটিতে বসালে অপর চলকটির মান পাওয়া যায়।

আড়গুণন পদ্ধতি (Cross multiplication method):

আড়গুণন পদ্ধতিকে বজ্রগুণন পদ্ধতিও বলে।

নিচের সমীকরণ দুইটি বিবেচনা করি:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ldots (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ldots (2)$$

সমীকরণ (1) কে b_2 দিয়ে ও সমীকরণ (2) কে b_1 দিয়ে গুণ করে পাই,

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \ldots (3)$$

$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \ldots (4)$$

সমীকরণ (3) থেকে সমীকরণ (4) বিয়োগ করে পাই,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

বা, $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_1c_2 - b_2c_1$

বা, $\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \ldots (5)$

আবার, সমীকরণ (1) কে a_2 দিয়ে ও সমীকরণ (2) কে a_1 দিয়ে গুণ করে পাই,

$$a_1a_2x + a_2b_1y + c_1a_2 = 0 \ldots (6)$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y + c_2a_1 = 0 \ldots (7)$$

সমীকরণ (6) থেকে সমীকরণ (7) বিয়োগ করে পাই,

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + c_1a_2 - c_2a_1 = 0$$

বা, $-(a_1b_2 - a_2b_1)y = -(c_1a_2 - c_2a_1)$

বা, $\dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \ldots (8)$

সমীকরণ (5) ও (8) থেকে পাই,

$$\boxed{\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

x ও y এর এরূপ সম্পর্ক থেকে এদের মান নির্ণয়ের কৌশলকে আড়গুণন পদ্ধতি বলে।

x ও y এর উল্লেখিত সম্পর্ক থেকে পাই,

২০২৫

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \text{ বা, } x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

আবার, $\dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, বা, $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধান: $(x, y) = \left(\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$

লক্ষ করি:

সমীকরণ	x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক	মনে রাখার চিত্র
$a_1x+b_1y+c_1=0$ $a_2x+b_2y+c_2=0$	$\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$	$x \quad y \quad 1$ $a_1 \mid b_1 \quad c_1 \quad a_1 \quad b_1$ $a_2 \mid b_2 \quad c_2 \quad a_2 \quad b_2$

দ্রষ্টব্য: প্রদত্ত উভয় সমীকরণের ধ্রুবক পদ ডানপক্ষে রেখেও আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়। তবে সেক্ষেত্রে চিহ্নের কিছু পরিবর্তন হবে। কিন্তু সমাধান একই পাওয়া যাবে।

কাজ:

$\left.\begin{array}{l} 4x - y - 7 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটকে

$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটের আকারে প্রকাশ করলে

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ এর মান বের কর।

উদাহরণ ৪. আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$6x - y = 1$$

$$3x + 2y = 13$$

সমাধান: পক্ষান্তর প্রক্রিয়ায় প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের ডানপক্ষ 0 (শূন্য) করে পাই,

$$6x - y - 1 = 0$$

$$3x + 2y - 13 = 0$$

সমীকরণদ্বয়কে যথাক্রমে

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 6,\ b_1 = -1,\ c_1 = -1$

$a_2 = 3,\ b_2 = 2,\ c_2 = -13$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

বা, $\dfrac{x}{(-1)\times(-13) - 2\times(-1)} = \dfrac{y}{(-1)\times 3 - (-13)\times 6} = \dfrac{1}{6\times 2 - 3\times(-1)}$

বা, $\dfrac{x}{13+2} = \dfrac{y}{-3+78} = \dfrac{1}{12+3}$

বা, $\dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{75} = \dfrac{1}{15}$

সুতরাং, $\dfrac{x}{15} = \dfrac{1}{15}$ বা, $x = \dfrac{15}{15} = 1$

আবার, $\dfrac{y}{75} = \dfrac{1}{15}$ বা, $y = \dfrac{75}{15} = 5$

$\therefore$ সমাধান $(x, y) = (1, 5)$

	x	y	1	
a_1	b_1	c_1	a_1	b_1
a_2	b_2	c_2	a_2	b_2

$\downarrow$

	x	y	1	
6	−1	−1	6	−1
3	2	−13	3	2

উদাহরণ ৫. আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$3x - 4y = 0$

$2x - 3y = -1$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$3x - 4y = 0$
$2x - 3y = -1$
বা,
$3x - 4y + 0 = 0$
$2x - 3y + 1 = 0$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{-4\times 1 - (-3)\times 0} = \frac{y}{0\times 2 - 1\times 3} = \frac{1}{3\times(-3) - 2\times(-4)}$$

বা, $\dfrac{x}{-4+0} = \dfrac{y}{0-3} = \dfrac{1}{-9+8}$

বা, $\dfrac{x}{-4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{1}{-1}$

	x	y	1	
3	-4	0	3	-4
2	-3	1	2	-3

বা, $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{1}$

সুতরাং, $\dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{1}$ বা, $x = 4$

আবার, $\dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{1}$ বা, $y = 3$

$\therefore$ সমাধান $(x, y) = (4, 3)$

উদাহরণ ৬. আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 8$$
$$\frac{5x}{4} - 3y = -3$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে $ax + by + c = 0$ আকারে সাজিয়ে পাই,

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 8$

বা, $\dfrac{3x+2y}{6} = 8$

বা, $3x + 2y - 48 = 0$

আবার, $\dfrac{5x}{4} - 3y = -3$

বা, $\dfrac{5x - 12y}{4} = -3$

বা, $5x - 12y + 12 = 0$

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়

$3x + 2y - 48 = 0$

$5x - 12y + 12 = 0$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{2 \times 12 - (-12) \times (-48)} = \frac{y}{(-48) \times 5 - 12 \times 3} = \frac{1}{3 \times (-12) - 5 \times 2}$$

বা, $\dfrac{x}{24 - 576} = \dfrac{y}{-240 - 36} = \dfrac{1}{-36 - 10}$

বা, $\dfrac{x}{-552} = \dfrac{y}{-276} = \dfrac{1}{-46}$

	x	y	1	
3	2	-48	3	2
5	-12	12	5	-12

বা, $\dfrac{x}{552} = \dfrac{y}{276} = \dfrac{1}{46}$

সুতরাং, $\dfrac{x}{552} = \dfrac{1}{46}$ বা, $x = \dfrac{552}{46} = 12$

আবার, $\dfrac{y}{276} = \dfrac{1}{46}$ বা, $y = \dfrac{276}{46} = 6$

$\therefore$ সমাধান: $(x, y) = (12, 6)$

সমাধানের শুদ্ধি পরীক্ষা: প্রাপ্ত x ও y এর মান প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই,

১ম সমীকরণে, বামপক্ষ $= \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{12}{2} + \dfrac{6}{3} = 6 + 2 = 8 =$ ডানপক্ষ

২য় সমীকরণে, বামপক্ষ $= \dfrac{5x}{4} - 3y = \dfrac{5 \times 12}{4} - 3 \times 6 = 15 - 18 = -3 =$ ডানপক্ষ।

$\therefore$ সমাধান শুদ্ধ হয়েছে।

উদাহরণ ৭. আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর: $ax - by = ab = bx - ay$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়,

$$\begin{aligned} ax - by &= ab \\ bx - ay &= ab \end{aligned} \qquad \text{বা,} \qquad \begin{aligned} ax - by - ab &= 0 \\ bx - ay - ab &= 0 \end{aligned}$$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{(-b) \times (-ab) - (-a)(-ab)} = \frac{y}{(-ab) \times b - (-ab) \times a}$$
$$= \frac{1}{a \times (-a) - b \times (-b)}$$

বা, $\dfrac{x}{ab^2 - a^2b} = \dfrac{y}{-ab^2 + a^2b} = \dfrac{1}{-a^2 + b^2}$

বা, $\dfrac{x}{-ab(a-b)} = \dfrac{y}{ab(a-b)} = \dfrac{1}{-(a+b)(a-b)}$

$$\begin{array}{c|cccc} & x & & y & 1 \\ a & -b & -ab & a & -b \\ b & -a & -ab & b & -a \end{array}$$

বা, $\dfrac{x}{ab(a-b)} = \dfrac{y}{-ab(a-b)} = \dfrac{1}{(a+b)(a-b)}$

সুতরাং, $\dfrac{x}{ab(a-b)} = \dfrac{1}{(a+b)(a-b)}$, বা, $x = \dfrac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{ab}{a+b}$

আবার, $\dfrac{y}{-ab(a-b)} = \dfrac{1}{(a+b)(a-b)}$, বা, $y = \dfrac{-ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{-ab}{a+b}$

$\therefore (x, y) = \left(\dfrac{ab}{a+b}, \dfrac{-ab}{a+b}\right)$

অনুশীলনী ১২.২

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর (১ - ৩):

১. $7x - 3y = 31$
$9x - 5y = 41$

২. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

৩. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
$ax + by = a^2 + b^2$

অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কর (৪ - ৬):

৪. $7x - 3y = 31$
$9x - 5y = 41$

৫. $7x - 8y = -9$
$5x - 4y = -3$

৬. $ax + by = c$
$a^2x + b^2y = c^2$

আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর (৭ - ১৫):

৭. $2x + 3y + 5 = 0$
$4x + 7y + 6 = 0$

৮. $3x - 5y + 9 = 0$
$5x - 3y - 1 = 0$

৯. $x + 2y = 7$
$2x - 3y = 0$

১০. $4x + 3y = -12$
$2x = 5$

১১. $-7x + 8y = 9$
$5x - 4y = -3$

১২. $3x - y - 7 = 0$
$2x + y - 3 = 0$

১৩. $ax + by = a^2 + b^2$
$2bx - ay = ab$

১৪. $y(3 + x) = x(6 + y)$
$3(3 + x) = 5(y - 1)$

১৫. $(x + 2)(y - 3) = y(x - 1)$
$5x - 11y - 8 = 0$

লৈখিক পদ্ধতি (Graphical Method)

দুই চলকবিশিষ্ট একটি সরল সমীকরণে বিদ্যমান চলক x ও y এর সম্পর্ককে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এই চিত্রকে ঐ সম্পর্কের লেখচিত্র বলে। এ জাতীয় সমীকরণের লেখচিত্রে অসংখ্য বিন্দু থাকে। এরূপ কয়েকটি বিন্দু স্থাপন করে এদের পরস্পর সংযুক্ত করলেই লেখচিত্র পাওয়া যায়।

সরল সহসমীকরণের প্রত্যেকটির অসংখ্য সমাধান রয়েছে। প্রত্যেকটি সমীকরণের লেখ একটি সরলরেখা। সরলরেখাটির প্রত্যেকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। কোনো লেখ নির্দিষ্ট করতে তিন বা ততোধিক বিন্দু আবশ্যক। এখন আমরা নিচের সমীকরণজোটটি সমাধান করার চেষ্টা করবো:

$$2x + y = 3 \ldots (1)$$

$$4x + 2y = 6 \ldots (2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y = 3 - 2x$।

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	-1	0	3
y	5	3	-3

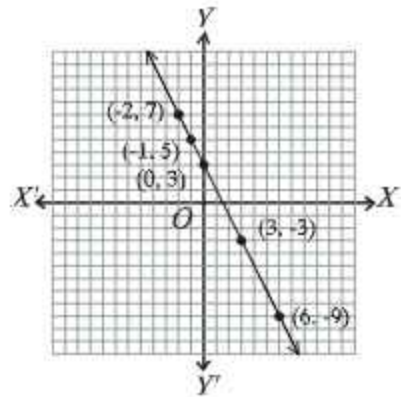
$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-1,5),(0,3)$ ও $(3,-3)$।

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই, $2y=6-4x$ বা, $y=\dfrac{6-4x}{2}$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপে মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	-2	0	6
y	7	3	-9

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-2,7),(0,3)$ ও $(6,-9)$।

মনে করি, ছক কাগজে XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।
ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1,5),(0,3)$ ও $(3,-3)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।
আবার, সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত $(-2,7),(0,3)$ ও $(6,-9)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা।

তবে লক্ষ করি, সরলরেখা দুইটি পরস্পরের উপর সমাপতিত হয়ে একটি সরলরেখায় পরিণত হয়েছে। আবার, সমীকরণ (2) এর উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করলে সমীকরণ (1) পাওয়া যায়। এ কারণে সমীকরণদ্বয়ের লেখ পরস্পর সমাপতিত হয়েছে।

এখানে, $\left.\begin{array}{l}2x+y=3\ldots(1)\\4x+2y=6\ldots(2)\end{array}\right\}$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল। এরূপ সমীকরণজোটের অসংখ্য সমাধান আছে এবং সমীকরণজোটটির লেখ একটি সরলরেখা।

এবার আমরা নিচের সমীকরণজোটটি সমাধান করার চেষ্টা করব:

$$2x-y=4\ldots(1)$$

$$4x-2y=12\ldots(2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y=2x-4$।

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	-1	0	4
y	-6	-4	4

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-1,-6),(0.-4).(4,4)$।

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,

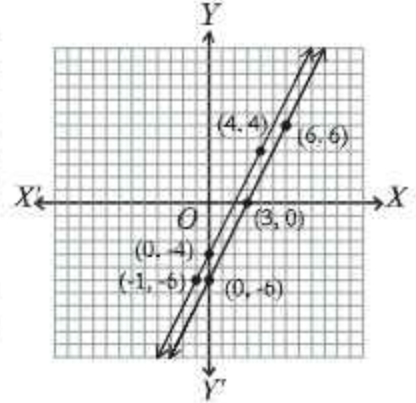
$4x - 2y = 12$, বা, $2x - y = 6$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $y = 2x - 6$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	0	3	6
y	-6	0	6

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(0, -6), (3, 0), (6, 6)$।

মনে করি, ছক কাগজে XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1, -6), (0, -4)$ ও $(4, 4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।
আবার, সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত $(0, -6), (3, 0), (6, 6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা।

চিত্রে লক্ষ করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের পৃথকভাবে প্রত্যেকটির অসংখ্য সমাধান থাকলেও জোট হিসেবে এদের সাধারণ সমাধান নেই। আরও লক্ষ করি যে, প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র দুইটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা। অর্থাৎ, রেখা দুইটি কখনো একে অপরকে ছেদ করবে না। অতএব, এদের কোনো সাধারণ ছেদ বিন্দু পাওয়া যাবে না। এ ক্ষেত্রে আমরা বলি যে, এরূপ সমীকরণজোটের কোনো সমাধান নেই। আমরা জানি, এরূপ সমীকরণজোট অসমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল।

আমরা এখন লেখচিত্রের সাহায্যে সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সমীকরণজোট সমাধান করবো।

দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সরল সমীকরণের লেখ একটি বিন্দুতে ছেদ করে। ঐ ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হবে। ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্কই হবে সমীকরণদ্বয়ের সমাধান।

উদাহরণ ৮. সমাধান কর ও সমাধান লেখচিত্রে দেখাও:

$$2x + y = 8$$

$$3x - 2y = 5$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$$2x + y - 8 = 0 \ldots (1)$$

$$3x - 2y - 5 = 0 \ldots (2)$$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{1\times(-5)-(-2)\times(-8)}=\frac{y}{(-8)\times 3-(-5)\times 2}=\frac{1}{2(-2)-3\times 1}$$

বা, $\frac{x}{-5-16}=\frac{y}{-24+10}=\frac{1}{-4-3}$

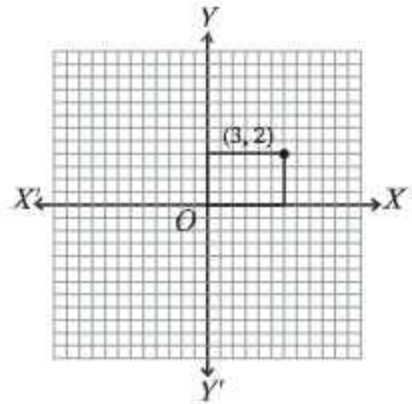
বা, $\frac{x}{-21}=\frac{y}{-14}=\frac{1}{-7}$

বা, $\frac{x}{21}=\frac{y}{14}=\frac{1}{7}$

$\therefore \frac{x}{21}=\frac{1}{7}$, বা, $x=\frac{21}{7}=3$

আবার, $\frac{y}{14}=\frac{1}{7}$, বা, $y=\frac{14}{7}=2$

$\therefore$ সমাধান: $(x,y)=(3,2)$

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দুই বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(3,2)$ বিন্দুটি স্থাপন করি।

উদাহরণ ৯. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর:

$3x-y=3$

$5x+y=21$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$3x-y=3\ldots(1)$

$5x+y=21\ldots(2)$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $3x-y=3$, বা, $y=3x-3$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	-1	0	3
y	-6	-3	6

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-1,-6),(0,-3),(3.6)$

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই, $5x+y=21$, বা, $y=21-5x$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	3	4	5
y	6	1	-4

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(3,6),(4,1),(5,-4)$।

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1,-6),(0,-3),(3,6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত $(3,6),(4,1),(5,-4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা।

মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3,6)$

$\therefore$ সমাধান: $(x,y)=(3,6)$

উদাহরণ ১০. লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর:

$$2x+5y=-14$$

$$4x-5y=17$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$$2x+5y=-14\ldots(1)$$

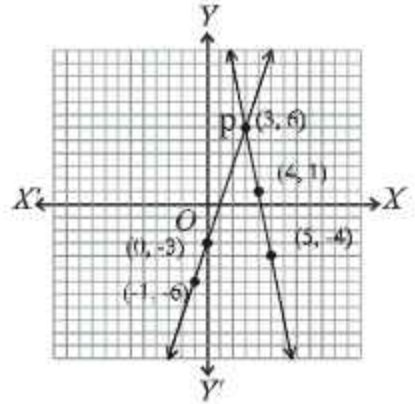
$$4x-5y=17\ldots(2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $5y=-14-2x$, বা, $y=\dfrac{-2x-14}{5}$

সমীকরণটিতে x এর সুবিধামত কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	3	$\frac{1}{2}$	-2
y	-4	-3	-2

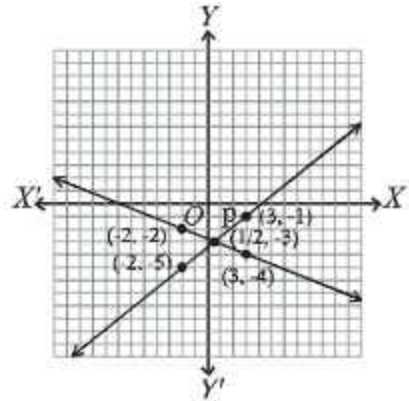
$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(3,-4),\left(\dfrac{1}{2},-3\right),(-2,-2)$।

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই, $5y=4x-17$, বা, $y=\dfrac{4x-17}{5}$

সমীকরণটিতে x এর সুবিধামত কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	3	$\frac{1}{2}$	-2
y	-1	-3	-5

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(3, -1), \left(\frac{1}{2}, -3\right), (-2, -5)$

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দুই বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন, ছক কাগজে সমীকরণ (1) থেকে প্রাপ্ত $(3, -4), \left(\frac{1}{2}, -3\right), (-2, -2)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে এদের পরপর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (2) থেকে প্রাপ্ত $(3, -1), \left(\frac{1}{2}, -3\right)$, $(-2, -5)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে এদের পরপর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্রে দেখা যায়, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$

$\therefore$ সমাধান: $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -3\right)$

উদাহরণ ১১. লেখের সাহায্যে সমাধান কর: $3 - \frac{3}{2}x = 8 - 4x$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $3 - \frac{3}{2}x = 8 - 4x$

ধরি, $y = 3 - \frac{3}{2}x = 8 - 4x$

$\therefore y = 3 - \frac{3}{2}x \ldots (1)$

এবং $y = 8 - 4x \ldots (2)$

এখন, সমীকরণ (1) এ x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	-2	0	2
y	6	3	0

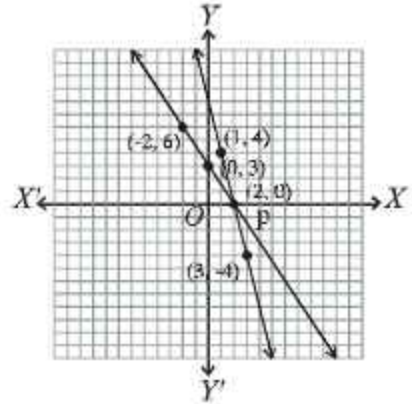
সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-2, 6), (0, 3), (2, 0)$

আবার, সমীকরণ (2) এ x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিম্নের ছকটি তৈরি করি:

x	1	2	3
y	4	0	-4

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(1, 4), (2, 0), (3, -4)$

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন, ছক কাগজে সমীকরণ (1) থেকে প্রাপ্ত $(-2, 6), (0, 3), (2, 0)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরপর সংযুক্ত করি। তাহলে, লেখটি হবে একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (2) থেকে প্রাপ্ত $(1, 4), (2, 0), (3, -4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে এগুলো পরপর সংযুক্ত করি। তাহলে, লেখটি হবে একটি সরলরেখা।

মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্রে দেখা যায়, P ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(2, 0)$।

$\therefore$ সমাধান: $x = 2$

কাজ: $2x - y - 3 = 0$ সমীকরণের লেখের উপর ছকের মাধ্যমে চারটি বিন্দু নির্ণয় কর। অতঃপর ছক কাগজে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একক নিয়ে বিন্দুগুলো স্থাপন কর ও এদের পরস্পর সংযুক্ত কর। লেখটি কি সরলরেখা হয়েছে?

অনুশীলনী ১২.৩

লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর:

১. $3x + 4y = 14$
$4x - 3y = 2$

২. $2x - y = 1$
$5x + y = 13$

৩. $2x + 5y = 1$
$x + 3y = 2$

৪. $3x - 2y = 2$
$5x - 3y = 5$

৫. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$
$2x + 3y = 13$

৬. $3x + y = 6$
$5x + 3y = 12$

৭. $3x + 2y = 4$
$3x - 4y = 1$

৮. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$
$x + \frac{y}{6} = 3$

৯. $3x + 2 = x - 2$

১০. $3x - 7 = 3 - 2x$

বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান

দৈনন্দিন জীবনে এমন কিছু গাণিতিক সমস্যা আছে যা সমীকরণ গঠনের মাধ্যমে সমাধান করা সহজতর হয়। এ জন্য সমস্যার শর্ত বা শর্তাবলি থেকে দুইটি অজ্ঞাত রাশির জন্য দুইটি গাণিতিক প্রতীক, প্রধানত চলক x, y ধরা হয়। অজ্ঞাত রাশি দুইটির মান নির্ণয়ের জন্য দুইটি সমীকরণ গঠন করতে হয়। গঠিত সমীকরণদ্বয় সমাধান করলেই অজ্ঞাত রাশি দুইটির মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ ১২. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাথে 5 যোগ করলে যোগফল হবে সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ। আর সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে, তা মূল সংখ্যাটি থেকে 9 কম হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, নির্ণেয় সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্ক x এবং একক স্থানীয় অঙ্ক y। অতএব, সংখ্যাটি $10x + y$।

$\therefore$ ১ম শর্তানুসারে, $x + y + 5 = 3x \ldots (1)$

এবং ২য় শর্তানুসারে, $10y + x = (10x + y) - 9 \ldots (2)$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y = 3x - x - 5$, বা, $y = 2x - 5 \ldots (3)$

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$10y - y + x - 10x + 9 = 0$

বা, $9y - 9x + 9 = 0$

বা, $y - x + 1 = 0$

বা, $2x - 5 - x + 1 = 0$ [(3) হতে y এর মান বসিয়ে পাই]

বা, $x = 4$

(3) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $y = 2 \times 4 - 5 = 8 - 5 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি হবে $10x + y = 10 \times 4 + 3 = 40 + 3 = 43$

উদাহরণ ১৩. আট বছর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের আটগুণ ছিল। দশ বছর পর পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে কার বয়স কত?

সমাধান: মনে করি, বর্তমানে পিতার বয়স x বছর ও পুত্রের বয়স y বছর।

$\therefore$ ১ম শর্তানুসারে, $x - 8 = 8(y - 8) \ldots (1)$

এবং ২য় শর্তানুসারে, $x + 10 = 2(y + 10) \ldots (2)$

(1) হতে পাই, $x - 8 = 8y - 64$

বা, $x = 8y - 64 + 8$

বা, $x = 8y - 56 \ldots (3)$

(2) হতে পাই, $x + 10 = 2y + 20$

বা, $8y - 56 + 10 = 2y + 20$ [(3) হতে x এর মান বসিয়ে]

বা, $8y - 2y = 20 + 56 - 10$

বা, $6y = 66$

বা, $y = 11$

(3) হতে পাই, $x = 8 \times 11 - 56 = 88 - 56 = 32$

$\therefore$ বর্তমানে পিতার বয়স 32 বছর ও পুত্রের বয়স 11 বছর।

উদাহরণ ১৪. একটি আয়তাকার বাগানের প্রস্থের দ্বিগুণ, দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 10 মিটার বেশি এবং বাগানটির পরিসীমা 100 মিটার। বাগানটির সীমানার বাইরে চারদিকে 2 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তাটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রতি বর্গ মিটারে 110 টাকা খরচ হয়।

ক) বাগানটির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার ধরে সমীকরণজোট গঠন কর।

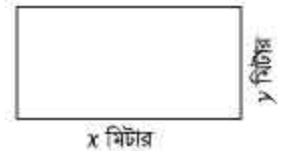
খ) বাগানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ) রাস্তাটি ইট দিয়ে তৈরি করতে মোট কত খরচ হবে?

সমাধান:

ক) আয়তাকার বাগানটির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার।

$\therefore$ ১ম শর্তানুসারে, $2y = x + 10 \ldots (1)$

এবং ২য় শর্তানুসারে, $2(x + y) = 100 \ldots (2)$

খ) সমীকরণ (2) হতে পাই, $2x + 2y = 100$

বা, $2x + x + 10 = 100$ [(1) হতে $2y$ এর মান বসিয়ে]

বা, $3x = 90$

বা, $x = 30$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $2y = 30 + 10$ [x এর মান বসিয়ে]

বা, $2y = 40$

বা, $y = 20$

$\therefore$ বাগানটির দৈর্ঘ্য 30 মিটার ও প্রস্থ 20 মিটার।

গ) রাস্তাসহ বাগানের দৈর্ঘ্য = $(30 + 4)$ মি. $= 34$ মি.
এবং রাস্তাসহ বাগানের প্রস্থ = $(20 + 4)$ মি. $= 24$ মি.
$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ বাগানের ক্ষেত্রফল - বাগানের ক্ষেত্রফল
= $(34 \times 24 - 30 \times 20)$ বর্গমিটার।
= $(816 - 600)$ বর্গমিটার।
= 216 বর্গমিটার।

$\therefore$ ইট দিয়ে রাস্তা তৈরি করার খরচ = (216×110) টাকা = 23760 টাকা

উদাহরণ ১৫. ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা কতবার একটির উপরে আরেকটি বসে? সময়গুলো নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, x টা y মিনিটে ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা একটি আরেকটির উপরে বসে। মনে রাখতে হবে x (সুবিধার্থে $x = 0, 1, \cdots 11$ যেখানে 0 প্রকৃতপক্ষে 12 বোঝাবে) পূর্ণসংখ্যা হলেও y কিন্তু পূর্ণসংখ্যা নাও হতে পারে। আমরা জানি মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার তুলনায় 12 গুণ বেশি দ্রুত চলে। x টার সময় ঘণ্টার কাঁটা ঠিক x লেখার উপরে এবং মিনিটের কাঁটা 12 এর উপরে ছিল। y মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা $\frac{y}{12}$ এবং মিনিটের কাঁটা y ঘর অতিক্রম করবে। তাই

$5x + \frac{y}{12} = y$

বা, $y - \frac{y}{12} = 5x$

বা, $\frac{11}{12}y = 5x$

$\therefore y = \frac{60}{11}x$

এবার আমরা x এর সম্ভাব্য মানগুলো বসিয়ে দেখি।

$x = 0$ হলে $y = 0$ মিনিট অর্থাৎ 12টা।

$x = 1$ হলে 1 টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট।

$x = 2$ হলে 2 টা $10\frac{10}{11}$ মিনিট।

$\cdots \cdots \cdots$

$x = 11$ হলে 11 টা 60 মিনিট বা 12টা।

প্রথম ও শেষ সময় দুইটি একই সময় বলে কাঁটা দুইটি 11 বার মিলিত হবে এবং সময়গুলো হলো x টা $\frac{60}{11}x$ মিনিট।

কাজ: ABC ত্রিভুজে $\angle B = 2x^\circ$, $\angle C = x^\circ$, $\angle A = y^\circ$ এবং $\angle A = \angle B + \angle C$ হলে, x ও y এর মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ১২.৪

১. নিচের কোন শর্তে $ax + by + c = 0$ ও $px + qy + r = 0$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল হবে?

ক) $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ খ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ গ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ ঘ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$

২. $x + y = 4$, $x - y = 2$ হলে (x, y) এর মান নিচের কোনটি?

ক) $(2, 4)$ খ) $(4, 2)$ গ) $(3, 1)$ ঘ) $(1, 3)$

৩. $x + y = 6$ ও $2x = 4$ হলে, y মান কত?

ক) 2 খ) 4 গ) 6 ঘ) 8

৪. নিচের কোনটির জন্য নিম্নের ছকটি সঠিক?

x	0	2	4
y	-4	0	4

ক) $y = x - 4$ খ) $y = 8 - x$ গ) $y = 4 - 2x$ ঘ) $y = 2x - 4$

৫. $2x - y = 8$ এবং $x - 2y = 4$ হলে, $x + y$ = কত?

ক) 0 খ) 4 গ) 8 ঘ) 12

৬. $x - y - 4 = 0$ এবং $3x - 3y - 10 = 0$ সমীকরণদ্বয়

(i) পরস্পর নির্ভরশীল।

(ii) পরস্পর সমঞ্জস।

(iii) এর কোনো সমাধান নেই।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) ii খ) iii গ) i ও iii ঘ) ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৭-৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

আয়তাকার একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 2 মিটার বেশি এবং মেঝের পরিসীমা 20 মিটার। ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে প্রতি বর্গমিটারে 900 টাকা খরচ হয়।

৭. ঘরটির মেঝের দৈর্ঘ্য কত মিটার?

ক) 10 খ) 8 গ) 6 ঘ) 4

৮. ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?

ক) 24 খ) 32 গ) 48 ঘ) 80

৯. ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে মোট কত খরচ হবে?

ক) 72000 খ) 43200 গ) 28800 ঘ) 21600

সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (১০-১৭):

১০. কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের প্রত্যেকটির সাথে 1 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে। আবার, লব ও হরের প্রত্যেকটি থেকে 5 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

১১. কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। আর লব থেকে 7 বিয়োগ এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

১২. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা 1 বেশি। কিন্তু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত?

১৩. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 4। সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তার ও মূল সংখ্যাটির যোগফল 110। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

১৪. মাতার বর্তমান বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির চারগুণ। 5 বছর পর মাতার বয়স ঐ দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। মাতার বর্তমান বয়স কত?

১৫. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম ও প্রস্থ 3 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 9 বর্গমিটার কম হবে। আবার দৈর্ঘ্য 3 মিটার বেশি ও প্রস্থ 2 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গমিটার বেশি হবে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

১৬. একটি নৌকা দাঁড় বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 15 কি.মি. যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘণ্টায় 5 কি.মি.। নৌকার বেগ নির্ণয় কর।

১৭. একজন গার্মেন্টস শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতিবছর শেষে একটি নির্দিষ্ট বেতনবৃদ্ধি পান। তার মাসিক বেতন 4 বছর পর 4500 টাকা ও 8 বছর পর 5000 টাকা হয়। তার চাকরি শুরুর বেতন ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

১৮. একটি সরল সমীকরণজোট $x + y = 10,\ 3x - 2y = 0$

ক) দেখাও যে, সমীকরণজোটটি সমঞ্জস। এর কয়টি সমাধান আছে?

খ) সমীকরণজোটটি সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর।

গ) সমীকরণদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৯. কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে 7 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা 2 হয়। আবার হর হতে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা 1 হয়।

ক) ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$ ধরে সমীকরণজোট গঠন কর।

খ) সমীকরণজোটটি আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর। ভগ্নাংশটি কত?

গ) সমীকরণজোটটির লেখ অঙ্কন করে (x, y) এর প্রাপ্ত মানের সত্যতা যাচাই কর।

২০. দুইটি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা 17 এবং এদের কর্ণের সংখ্যা 53 হলে প্রত্যেক বহুভুজের বাহুর সংখ্যা কত?

২১. শিক্ষক বললেন একটি কাজ একা অথবা ছাত্র-ছাত্রীর জুটি করতে পারবে। ছাত্রদের $\frac{2}{3}$ এবং ছাত্রীদের $\frac{3}{5}$ অংশ জুটি বেঁধে কাজটি করলো। শ্রেণির কত ভাগ ছাত্র-ছাত্রী একা কাজটি করলো?

২২. 100 ও 200 মিটার দীর্ঘ দুইটি ট্রেন সমবেগে সামনাসামনি অতিক্রম করতে 5 সেকেন্ড সময় লাগে কিন্তু একই দিকে চললে অতিক্রম করতে 15 সেকেন্ড সময় লাগে। ট্রেন দুইটির বেগ নির্ণয় কর।

২৩. কমপক্ষে কতগুলো ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে তার গুণফল অবশ্যই 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে?

২৪. ঘড়ির ঘণ্টা এবং মিনিটের কাঁটা পরস্পরের সঙ্গে 30 ডিগ্রি কোণ করে কত বার? সময়গুলো নির্ণয় কর।

অধ্যায় ১৩

সসীম ধারা (Finite Series)

প্রাত্যহিক জীবনে 'ক্রম' বহুল প্রচলিত একটি শব্দ। যেমন– দোকানের তাকে ভোগ্যপণ্য সাজাতে, নাটক ও অনুষ্ঠানের ঘটনাবলি সাজাতে, গুদামঘরে সুন্দরভাবে দ্রব্যাদি রাখতে ক্রমের ধারণা ব্যবহৃত হয়। আবার অনেক কাজ সহজে এবং দৃষ্টিনন্দনভাবে সম্পাদন করতে আমরা বড় হতে ছোট, শিশু হতে বৃদ্ধ, হালকা হতে ভারী ইত্যাদি বিভিন্ন ধরনের ক্রম ব্যবহার করি। এই ক্রমের ধারণা হতেই বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক ধারার উদ্ভব হয়েছে। এই অধ্যায়ে অনুক্রম ও ধারার মধ্যে সম্পর্ক ও এতদ সংক্রান্ত বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ▶ অনুক্রম ও ধারা বর্ণনা করতে ও এদের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- ▶ সমান্তর ধারা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ সমান্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ▶ স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের ও ঘনের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবে।
- ▶ ধারার বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- ▶ গুণোত্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

অনুক্রম (Sequence)

নিচের সম্পর্কটি লক্ষ করি:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

এখানে প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n তার দ্বিগুণ সংখ্যা $2n$ এর সাথে সম্পর্কিত। অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\{1, 2.3, \cdots\}$ থেকে একটি নিয়মের মাধ্যমে যোগবোধক জোড় সংখার সেট $\{2, 4, 6, \cdots\}$ পাওয়া যায়। এই সাজানো জোড়সংখ্যার সেটটি একটি অনুক্রম। সুতরাং, কতকগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি তার পূর্বের পদ ও পরের পদের সাথে কীভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়। এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

উপরের সম্পর্কটিকে ফাংশন বলে এবং $f(n) = 2n$ লেখা হয়। এই অনুক্রমের সাধারণ পদ $2n$। যেকোনো অনুক্রমের পদসংখ্যা অসীম। অনুক্রমটি সাধারণ পদের সাহায্যে লেখার পদ্ধতি হলো $\{2n\}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ বা, $\{2n\}_{n=1}^{+\infty}$ বা, $\{2n\}$।

অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ ইত্যাদি বলা হয়। $1, 3, 5, 7, \cdots$ অনুক্রমের প্রথম পদ $= 1$, দ্বিতীয় পদ $= 3$, ইত্যাদি। নিচে অনুক্রমের চারটি উদাহরণ দেওয়া হলো:

$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

$1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots$

$1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

কাজ:

ক) নিচে ছয়টি অনুক্রমের সাধারণ পদ দেওয়া আছে। অনুক্রমগুলো লিখ:

(১) $\frac{1}{n}$ (২) $\frac{n-1}{n+1}$ (৩) $\frac{1}{2^n}$

(৪) $\frac{1}{2^{n-1}}$ (৫) $(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ (৬) $(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$

খ) তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে অনুক্রমটি লিখ।

ধারা (Series)

কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর $+$ চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা (Series) পাওয়া যায়। যেমন, $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots$ একটি ধারা। ধারাটির পরপর দুইটি পদের পার্থক্য সমান। আবার $2+4+8+16+\cdots$ একটি ধারা। এর পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান। সুতরাং, যেকোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের উপর নির্ভর করে ধারাটির বৈশিষ্ট্য। ধারাগুলোর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ দুইটি ধারা হলো সমান্তর ধারা ও গুণোত্তর ধারা।

সমান্তর ধারা (Arithmetic Series)

কোনো ধারার যেকোনো পাশাপাশি দুইটি পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে।

উদাহরণ ১. $1+3+5+7+9+11$ একটি ধারা। এই ধারাটির প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 3, তৃতীয় পদ 5 ইত্যাদি।

এখানে, দ্বিতীয় পদ $-$ প্রথম পদ $= 3 - 1 = 2,$

তৃতীয় পদ $-$ দ্বিতীয় পদ $= 5 - 3 = 2,$ চতুর্থ পদ $-$ তৃতীয় পদ $= 7 - 5 = 2,$

পঞ্চম পদ $-$ চতুর্থ পদ $= 9 - 7 = 5,$ ষষ্ঠ পদ $-$ পঞ্চম পদ $= 11 - 9 = 2$

সুতরাং, ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

এই ধারায় প্রাপ্ত দুইটি পদের বিয়োগফলকে সাধারণ অন্তর বলা হয়। উল্লেখিত ধারার সাধারণ অন্তর 2। ধারাটির পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট। এ জন্য এটি একটি সসীম বা সান্ত ধারা (Finite Series)। উল্লেখ্য, সমান্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট না হলে একে অসীম বা অনন্ত ধারা (Infinite Series) বলে। যেমন, $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots$ একটি অসীম ধারা। সমান্তর ধারায় সাধারণত প্রথম পদকে a দ্বারা এবং সাধারণ অন্তরকে d দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে সংজ্ঞানুসারে, প্রথম পদ a হলে, দ্বিতীয় পদ $a + d$, তৃতীয় পদ $a + 2d$ ইত্যাদি। সুতরাং, ধারাটি হবে, $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots$।

সমান্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয়

মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a ও সাধারণ অন্তর d। তাহলে ধারাটির

প্রথম পদ $= a = a + (1 - 1)d$

দ্বিতীয় পদ $= a + d = a + (2 - 1)d$

তৃতীয় পদ $= a + 2d = a + (3 - 1)d$

চতুর্থ পদ $= a + 3d = a + (4 - 1)d$

$\cdots \cdots \cdots$

$\cdots \cdots \cdots$

$\therefore n$ তম পদ $= a + (n - 1)d$

এই n তম পদকেই সমান্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d জানা থাকলে n তম পদে $n = 1, 2, 3. 4, \cdots$ বসিয়ে পর্যায়ক্রমে ধারাটির প্রত্যেকটি পদ নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ 3 এবং সাধারণ অন্তর 2। অতএব, ধারাটির n তম পদ $= 3 + (n - 1) \times 2 = 2n + 1$।

> **কাজ:** কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 7 হলে, ধারাটির প্রথম ছয়টি পদ, 22 তম পদ, r তম এবং $(2p + 1)$ তম পদ নির্ণয় কর।

উদাহরণ ২. $5 + 8 + 11 + 14 + \cdots$ ধারাটির কোন পদ 383?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 5$, সাধারণ অন্তর $d = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3$

$\therefore$ এটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 383

আমরা জানি, n তম পদ = $a+(n-1)d$

$\therefore a+(n-1)d=383$

বা, $5+(n-1)3=383$

বা, $5+3n-3=383$

বা, $3n=383-5+3$

বা, $3n=381$

বা, $n=\dfrac{381}{3}$

বা, $n=127$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার 127 তম পদ = 383।

সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি

মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, শেষ পদ p, সাধারণ অন্তর d, পদ সংখ্যা n এবং ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n।

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে শেষ পদ এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে প্রথম পদ লিখে পাওয়া যায়

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(p-2d)+(p-d)+p\ldots(1)$$

$$\text{এবং } S_n=p+(p-d)+(p-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a\ldots(2)$$

যোগ করে, $2S_n=(a+p)+(a+p)+(a+p)+\cdots+(a+p)+(a+p)+(a+p)$

বা, $2S_n=n(a+p)$ [$\because$ ধারাটির পদ সংখ্যা n]

$\therefore S_n=\dfrac{n}{2}(a+p)\ldots(3)$

আবার, n তম পদ $=p=a+(n-1)d$। p এর মান (3) এ বসিয়ে পাই,

$S_n=\dfrac{n}{2}[a+\{a+(n-1)d\}]$

অর্থাৎ, $S_n=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\ldots(4)$

কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, শেষ পদ p এবং পদ সংখ্যা n জানা থাকলে, (3) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d, পদ সংখ্যা n জানা থাকলে, (4) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি S_n

অর্থাৎ, $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে লিখে পাওয়া যায়

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \ldots (1)$$

$$\text{এবং } S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \ldots (2)$$

যোগ করে, $2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$ [n সংখ্যক পদ]

বা, $2S_n = n(n+1)$

$\therefore S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \ldots (3)$

উদাহরণ ৩. প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা (3) নং সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$S_{50} = \dfrac{50(50+1)}{2} = 25 \times 51 = 1275$

$\therefore$ প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 1275।

উদাহরণ ৪. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 =$ কত?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অন্তর $d = 2 - 1 = 1$ এবং শেষ পদ $p = 99$।

$\therefore$ এটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 99

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ = $a + (n-1)d$

$\therefore a + (n-1)d = 99$

বা, $1 + (n-1)1 = 99$

বা, $1 + n - 1 = 99$

$\therefore n = 99$

(4) নং সূত্র হতে, সমান্তর ধারার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \dfrac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

সুতরাং, ধারাটির 99 টি পদের সমষ্টি $S_{99} = \dfrac{99}{2}\{2 \times 1 + (99-1) \times 1\} = \dfrac{99}{2}(2 + 98)$

$= \dfrac{99 \times 100}{2} = 99 \times 50 = 4950$

২০২৫

বিকল্প পদ্ধতি: (3) নং সূত্র হতে, $S_n = \frac{n}{2}(a+p)$

$\therefore S_{99} = \frac{99}{2}(1+99) = \frac{99 \times 100}{2} = 4950$

উদাহরণ ৫. $7+12+17+\cdots$ ধারাটির প্রথম 30টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 7$, সাধারণ অন্তর $d = 12 - 7 = 5$

$\therefore$ এটি একটি সমান্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n = 30$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

তাহলে, প্রথম 30টি পদের সমষ্টি $S_{30} = \frac{30}{2}\{2 \cdot 7 + (30-1)5\} = 15(14 + 29 \times 5)$

$= 15(14+145) = 15 \times 159 = 2385$

উদাহরণ ৬. রশিদ তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

ক) সমস্যাটিকে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর।

খ) তিনি 18 তম মাসে কত টাকা এবং প্রথম 18 মাসে মোট কত টাকা সঞ্চয় করেন?

গ) তিনি কত বছরে মোট 106200 টাকা সঞ্চয় করেন?

সমাধান:

ক) প্রশ্নানুসারে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 1200$, সাধারণ অন্তর $d = 100$

$\therefore$ দ্বিতীয় পদ $= 1200 + 100 = 1300$

তৃতীয় পদ $= 1300 + 100 = 1400$

$\therefore n$ তম পদ $= a + (n-1)d = 1200 + (n-1)100 = 1100 + 100n$

$\therefore$ ধারাটি $1200 + 1300 + 1400 + \cdots + (1100 - 100n)$

খ) আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore$ 18 তম মাসে সঞ্চয় $= a + (18-1)d = 1200 + 17 \times 100 = 2900$ টাকা

আবার, প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$\therefore$ প্রথম 18 মাসের সঞ্চয় $= \frac{18}{2}\{2 \times 1200 + (18-1) \times 100\}$ টাকা

$= 9(2400 + 1700) = 36900$ টাকা

গ) মনে করি, তিনি n মাসে 106200 টাকা সঞ্চয় করেন।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} = 106200$

বা, $\frac{n}{2}\{2\times 1200+(n-1)\times 100\} = 106200$

বা, $n(2400+100n-100) = 212400$

বা, $100n^2+2300n-212400 = 0$

বা, $n^2+23n-2124 = 0$

বা, $n^2+59n-36n-2124 = 0$

বা, $(n+59)(n-36) = 0$

অর্থাৎ, $n = -59$ অথবা $n = 36$

মাস কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সময়: 36 মাস বা 3 বছর।

অনুশীলনী ১৩.১

১. $13+20+27+34+\cdots+111$ ধারাটির পদ সংখ্যা কত?

ক) 10 খ) 13 গ) 15 ঘ) 20

২. $5+8+11+14+\cdots+62$ ধারাটি

(i) একটি সসীম ধারা (ii) একটি গুণোত্তর ধারা (iii) এর 19 তম পদ 59

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৩ - ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$7+13+19+25+\cdots$ একটি ধারা।

৩. ধারাটির 15 তম পদ কোনটি?

ক) 85 খ) 91 গ) 97 ঘ) 104

৪. ধারাটির প্রথম 20টি পদের সমষ্টি কত?

ক) 141 খ) 1210 গ) 1280 ঘ) 2560

৫. $2-5-12-19-\cdots$ ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12 তম পদ নির্ণয় কর।

৬. $8+11+14+17+\cdots$ ধারাটির কোন পদ 392?

৭. $4+7+10+13+\cdots$ ধারাটির কোন পদ 301?

৮. কোনো সমান্তর ধারার m তম পদ n এবং n তম পদ m হলে, ধারাটির $(m+n)$ তম পদ কত?

৯. $1+3+5+7+\cdots$ ধারাটির n পদের সমষ্টি কত?

১০. $8+16+24+\cdots$ ধারাটির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি কত?

১১. $5+11+17+23+\cdots+59=$ কত?

১২. $29+25+21+\cdots-23=$ কত?

১৩. কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23টি পদের সমষ্টি কত?

১৪. একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ -20 হলে, এর প্রথম 31টি পদের সমষ্টি কত?

১৫. $9+7+5+\cdots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল -144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

১৬. $2+4+6+8+\cdots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

১৭. কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n+1)$ হলে, ধারাটি নির্ণয় কর।

১৮. কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n+1)$। ধারাটির 10টি পদের সমষ্টি কত?

১৯. একটি সমান্তর ধারার প্রথম 12 পদের সমষ্টি 144 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 560 হলে, এর প্রথম 6 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২০. কোনো সমান্তর ধারার প্রথম m পদের সমষ্টি n এবং প্রথম n পদের সমষ্টি m হলে, এর প্রথম $(m+n)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২১. কোনো সমান্তর ধারায় p তম, q তম ও r তম পদ যথাক্রমে a, b, c হলে, দেখাও যে,

$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$।

২২. দেখাও যে, $1+3+5+7+\cdots+125=169+171+173+\cdots+209$।

২৩. এক ব্যক্তি 2500 টাকার একটি ঋণ কিছুসংখ্যক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজি হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে 2 টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি 1 টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে ঐ ব্যক্তি তার ঋণ শোধ করতে পারবেন?

২৪. কোন সমান্তর ধারার দুইটি নির্দিষ্ট পদ, l তম পদ l^2 এবং k তম পদ k^2।

ক) ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d ধরে উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ তৈরি কর।

খ) $(l+k)$ তম পদ নির্ণয় কর।

গ) প্রমাণ কর ধারাটির প্রথম $(l+k)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $\dfrac{l+k}{2}(l^2+k^2+l+k)$

ধারার বিভিন্ন সূত্র

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি S_n।

অর্থাৎ, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

আমরা জানি,

$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3$

বা, $r^3 - (r-1)^3 = 3r^2 - 3r + 1$

উপরের অভেদটিতে, $r = 1, 2, 3, \cdots, n$ বসিয়ে পাই,

$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$

$\cdots \; \cdots \; \cdots$

$\cdots \; \cdots \; \cdots$

$n^3 - (n-1)^3 = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1$

যোগ করে পাই,

$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1)$

বা, $n^3 = 3S_n - \dfrac{3n(n+1)}{2} + n \;\left[\because 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

বা, $3S_n = n^3 + \dfrac{3n(n+1)}{2} - n$

$= \dfrac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{2} = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \dfrac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$

$= \dfrac{n(2n^2 + 2n + n + 1)}{2} = \dfrac{n\{2n(n+1) + 1(n+1)\}}{2}$

বা, $3S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$\therefore S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি S_n

অর্থাৎ, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

আমরা জানি, $(r+1)^2 - (r-1)^2 = (r^2 + 2r + 1) - (r^2 - 2r + 1) = 4r$

বা, $(r+1)^2 r^2 - r^2(r-1)^2 = 4r \cdot r^2 = 4r^3$ [উভয়পক্ষকে r^2 দ্বারা গুণ করে]

উপরের অভেদটিতে, $r = 1, 2, 3. \cdots, n$ বসিয়ে পাই,

$2^2 \cdot 1^2 - 1^2 \cdot 0^2 = 4 \cdot 1^3$

$3^2 \cdot 2^2 - 2^2 \cdot 1^2 = 4 \cdot 2^3$

$4^2 \cdot 3^2 - 3^2 \cdot 2^2 = 4 \cdot 3^3$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$(n+1)^2 \cdot n^2 - n^2 \cdot (n-1)^2 = 4n^3$

যোগ করে পাই,

$(n+1)^2 \cdot n^2 - 1^2 \cdot 0^2 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$

বা, $(n+1)^2 \cdot n^2 = 4S_n$

বা, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\therefore S_n = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রয়োজনীয় সূত্র

১. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

২. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

৩. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

বিশেষ দ্রষ্টব্য: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

কাজ:

ক) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।

খ) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গুণোত্তর ধারা (Geometric Series)

কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হলে অর্থাৎ, যেকোনো পদকে এর পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল সর্বদা সমান পাওয়া গেলে, সে ধারাটিকে গুণোত্তর ধারা বলে এবং ভাগফলকে সাধারণ অনুপাত বলে। যেমন, $2+4+8+16+32$ ধারাটির প্রথম পদ 2, দ্বিতীয় পদ 4, তৃতীয় পদ 8, চতুর্থ পদ 16, পঞ্চম পদ 32। এখানে,

দ্বিতীয় পদের সাথে প্রথম পদের অনুপাত = $\frac{4}{2} = 2$

তৃতীয় পদের সাথে দ্বিতীয় পদের অনুপাত = $\frac{8}{4} = 2$

চতুর্থ পদের সাথে তৃতীয় পদের অনুপাত = $\frac{16}{8} = 2$

পঞ্চম পদের সাথে চতুর্থ পদের অনুপাত = $\frac{32}{16} = 2$।

সুতরাং, ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা। এই ধারায় যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান। উল্লেখিত ধারায় সাধারণ অনুপাত 2। ধারাটির পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট। এ জন্য এটি একটি গুণোত্তর সসীম ধারা।

ভৌত ও জীব বিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে, ব্যাংক ও বিমা ইত্যাদি প্রতিষ্ঠানে এবং বিভিন্ন প্রকার প্রযুক্তি বিদ্যায় গুণোত্তর ধারার ব্যাপক প্রয়োগ আছে।

গুণোত্তর ধারার পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট না থাকলে একে অনন্ত গুণোত্তর ধারা বলে।

গুণোত্তর ধারার প্রথম পদকে সাধারণত a দ্বারা এবং সাধারণ অনুপাতকে r দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে সংজ্ঞানুসারে, প্রথম পদ a হলে, দ্বিতীয় পদ ar, তৃতীয় পদ ar^2 ইত্যাদি। সুতরাং ধারাটি হবে, $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$

কাজ: নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে গুণোত্তর ধারাগুলো লিখ:

ক) প্রথম পদ 4, সাধারণ অনুপাত 10

খ) প্রথম পদ 9, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$

গ) প্রথম পদ 7, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$

ঘ) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত 1

ঙ) প্রথম পদ 1, সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{2}$

চ) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত -1

গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ

মনে করি, যেকোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, তাহলে ধারাটির

প্রথম পদ $= a = ar^{1-1}$ দ্বিতীয় পদ $= ar = ar^{2-1}$

তৃতীয় পদ$= ar^2 = ar^{3-1}$ চতুর্থ পদ$= ar^3 = ar^{4-1}$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

n তম পদ $= ar^{n-1}$

এই n তম পদকেই গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a ও সাধারণ অনুপাত r জানা থাকলে n তম পদে পর্যায়ক্রমে $r = 1, 2, 3, \cdots$ ইত্যাদি বসিয়ে ধারাটির যেকোনো পদ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ৭. $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ ধারাটির 10 তম পদ কত?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$, সাধরণ অনুপাত $r = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ $= 2 \times 2^{10-1} = 2 \times 2^9 = 1024$

উদাহরণ ৮. $128 + 64 + 32 + \cdots$ ধারাটির সাধারণ পদ কত?

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 128$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ইহা একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ $= ar^{n-1}$

সুতরাং, ধারাটির সাধারণ পদ $= 128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^7}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1-7}} = \frac{1}{2^{n-8}}$

উদাহরণ ৯. একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম ও দ্বিতীয় পদ যথাক্রমে 27 এবং 9 হলে, ধারাটির পঞ্চম পদ এবং দশম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 27$, দ্বিতীয় পদ $= 9$

তাহলে সাধারণ অনুপাত $r = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ পঞ্চম পদ $= ar^{5-1} = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{27 \times 1}{27 \times 3} = \frac{1}{3}$

এবং দশম পদ = $ar^{10-1} = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{3^3}{3^3 \times 3^6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$

গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r এবং পদ সংখ্যা n। যদি n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n হয়, তাহলে

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \ldots (1)$$

এবং $r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ [(1) কে r দ্বারা গুণ করে] $\ldots (2)$

বিয়োগ করে, $S_n - rS_n = a - ar^n$

বা, $S_n(1-r) = a(1-r^n)$

$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, যখন $r < 1$

আবার (2) থেকে (1) বিয়োগ করে পাই,

$rS_n - S_n = ar^n - a$

বা, $S_n(r-1) = a(r^n - 1)$

$\therefore S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, যখন $r > 1$

লক্ষণীয়: সাধারণ অনুপাত $r = 1$ হলে প্রত্যেক পদ $= a$

সুতরাং, এক্ষেত্রে $S_n = a + a + a + \cdots n$ পদ পর্যন্ত $= an$

কাজ: ক তার ছেলেকে স্কুলে নেওয়া-আনার জন্য এক ব্যক্তিকে ১লা এপ্রিল থেকে এক মাসের জন্য নিয়োগ করলেন। তার পারিশ্রমিক ঠিক করা হলো– প্রথম দিন এক পয়সা, দ্বিতীয় দিন প্রথম দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ দুই পয়সা, তৃতীয় দিন দ্বিতীয় দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ চার পয়সা। এই নিয়মে পারিশ্রমিক দিলে সাপ্তাহিক ছুটির দিনসহ এক মাস পর ঐ ব্যক্তি কত টাকা পাবেন?

উদাহরণ ১০. $12 + 24 + 48 + \cdots + 768$ ধারাটির সমষ্টি কত?

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 12$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{24}{12} = 2 > 1$।

$\therefore$ ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= 768$

আমরা জানি, n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore ar^{n-1} = 768$

বা, $12 \times 2^{n-1} = 768$

বা, $2^{n-1} = \frac{768}{12} = 64$

বা, $2^{n-1} = 2^6$

বা, $n - 1 = 6$

$\therefore n = 7$

সুতরাং, ধারাটির সমষ্টি $= \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$, যখন $r > 1$

$= \frac{12(2^7 - 1)}{2-1} = 12 \times (128 - 1) = 12 \times 127 = 1524$

উদাহরণ ১১. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ ধারাটির প্রথম আটটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} < 1$।

$\therefore$ ইহা একটি গুণোত্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n = 8$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি

$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, যখন $r < 1$

সুতরাং, ধারাটির ৪ টি পদের সমষ্টি $S_8 = \frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{1}{2}}$

$= 2\left(\frac{256 - 1}{256}\right) = \frac{255}{128} = 1\frac{127}{128}$

উদাহরণ ১২. সালাম সাহেব 2005 সালের জানুয়ারি মাসে বার্ষিক 120000 টাকা বেতনে চাকরিতে যোগদান করলেন। তাঁর বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ প্রতি বছর 5000 টাকা। প্রতি বছর তাঁর বেতন থেকে 10% ভবিষ্যতহবিল হিসেবে কর্তন করা হয়। তিনি বেতন থেকে বার্ষিক 12% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে বছর শেষে একটি ব্যাংকে 12000 টাকা জমা রাখেন। তিনি 2030 সালের 31 ডিসেম্বর চাকরি থেকে অবসরে যাবেন।

ক) সালাম সাহেবের মূল বেতন কোন ধারাকে সমর্থন করে? ধারাটি লিখ।

খ) ভবিষ্যতহবিল ব্যতীত তিনি বেতন হিসেবে চাকরি জীবনে মোট কত টাকা পাবেন।

গ) 2031 সালের 31 ডিসেম্বর ঐ ব্যাংকে মুনাফাসহ তার মোট কত টাকা জমা হবে?

সমাধান:

ক) সালাম সাহেবের মূল বেতন সমান্তর ধারা সমর্থন করে।

ধারাটির প্রথম পদ $a = 120000$ এবং সাধারণ অন্তর $= 5000$

$\therefore$ দ্বিতীয় পদ $= 120000 + 5000 = 125000$

তৃতীয় পদ $= 125000 + 5000 = 130000$

$\therefore$ ধারাটি, $120000 + 125000 + 130000 + \cdots$

খ) 2005 সালের জানুয়ারি থেকে 2030 সালের 31 ডিসেম্বর পর্যন্ত মোট $(2030 - 2005 + 1)$ বা, 26 বছর ভবিষ্যতহবিল ব্যতীত তাঁর বেতন বাবদ প্রাপ্য টাকার পরিমাণ

$(120000 - 120000$ এর $10\%) + (125000 - 125000$ এর $10\%) + (130000 - 130000$ এর $10\%) + \cdots$

$= (120000 - 12000) + (125000 - 12500) + (130000 - 13000) + \cdots$

$= 108000 + 112500 + 117000 + \cdots$

এক্ষেত্রে সৃষ্ট ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 108000$, সাধারণ অন্তর $d = 112500 - 108000 = 4500$ এবং পদ সংখ্যা $n = 26$

$\therefore$ 26 বছরে তাঁর প্রাপ্য মোট বেতনের পরিমাণ $= \frac{26}{2}\{2 \times 108000 + (26 - 1) \times 4500\}$ টাকা

$= 13(216000 + 112500) = 13 \times 328500 = 4270500$ টাকা

গ) 2005 সাল থেকে 2031 পর্যন্ত জমা করার মোট সময় $(2031 - 2005)$ বা 26 বছর

12000 টাকার 1 বছর শেষে জমা করেন $12000\left(1 + \frac{12}{100}\right) = 12000 \times 1.12$ টাকা

12000 টাকার 2 বছর শেষে জমা করেন $12000 \times (1.12)^2$ টাকা

12000 টাকার 3 বছর শেষে জমা করেন $12000 \times (1.12)^3$ টাকা

$\therefore$ 26 বছরে তাঁর জমাকৃত মোট টাকা $= 12000 \times 1.12 + 12000 \times (1.12)^2 + \cdots 26$ তম পদ পর্যন্ত $= 12000\{1.12 + (1.12)^2 + \cdots + (1.12)^{26}\}$

$$= 12000 \times 1.12 \times \frac{(1.12)^{26} - 1}{1.12 - 1} = 12000 \times 1.12 \times \frac{18.04}{0.12}$$

$= 2020488$ টাকা (প্রায়)

অনুশীলনী ১৩.২

১. a, b, c ও d সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $b = \frac{c+d}{2}$ খ) $a = \frac{b+c}{2}$ গ) $c = \frac{b+d}{2}$ ঘ) $d = \frac{a+c}{2}$

২. $n \in N$ এর জন্য

(i) $\sum i = \frac{n^2+n}{2}$

(ii) $\sum i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(iii) $\sum i^3 = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

নিচের ধারাটির ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\log 2 + \log 4 + \log 8 + \cdots$

৩. ধারাটির সাধারণ অন্তর কোনটি?

ক) 2 খ) 4 গ) log2 ঘ) 2log2

৪. ধারাটির সপ্তম পদ কোনটি?

ক) log32 খ) log64 গ) log128 ঘ) log256

৫. $64 + 32 + 16 + 8 + \cdots$ ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

৬. $3 + 9 + 27 + \cdots$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

৭. $128 + 64 + 32 + \cdots$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$?

৮. একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ কত?

৯. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - \cdots$ ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

১০. $5 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

১১. $3 + x + y + z + 243$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর।

১২. $2 - 4 + 8 - 16 + \cdots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত?

১৩. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ ধারাটির $(2n+1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৪. $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \cdots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?

১৫. $\log 2 + \log 16 + \log 512 + \cdots$ ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৬. $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, n এর মান কত?

১৭. $2 - 2 + 2 - 2 + \cdots$ ধারাটির $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

১৮. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৯. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?

২০. দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)^2$

২১. $\dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} = 210$ হলে n এর মান কত?

২২. 1 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি লৌহ দণ্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের মান আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

২৩. একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির চতুর্থ পদ -2 এবং নবম পদ $8\sqrt{2}$

ক) উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) ধারাটির 12 তম পদ নির্ণয় কর।

গ) ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২৪. কোন ধারার n তম পদ $2n - 4$

ক) ধারাটি নির্ণয় কর।

খ) ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ) প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম ৪টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২৫. দুপুর 1টা 15 মিনিটে 1 জন এস.এস.সি পরীক্ষার ফলাফল জানতে পারল। 1টা 20 মিনিটে জানল 8 জন, 1টা 25 মিনিটে জানল 27 জন। এভাবে ফলাফল ছড়িয়ে পড়ল।

ক) উদ্দীপকের আলোকে প্যাটার্ন দুইটি লিখ।

খ) ঠিক 2টা 10 মিনিটে কত জন এবং 2টা 10 মিনিট পর্যন্ত মোট কত জন ফলাফল জানতে পারবে?

গ) কয়টার সময় 6175225 জন ফলাফল জানতে পারবে?

অধ্যায় ১৪

অনুপাত, সদৃশতা ও প্রতিসমতা
(Ratio, Similarity and Symmetry)

দুইটি রাশির তুলনা করার জন্য এদের অনুপাত বিবেচনা করা হয়। অনুপাত নির্ণয়ের জন্য রাশি দুইটি একই এককে পরিমাপ করতে হয়। এ সম্পর্কে বীজগণিতে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- জ্যামিতিক অনুপাত সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রেখাংশের অন্তর্বিভক্তি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অনুপাত সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- সদৃশতার অনুপাত সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রতিসমতার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- হাতে-কলমে বাস্তব উপকরণের সাহায্যে রেখা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা যাচাই করতে পারবে।

অনুপাত ও সমানুপাতের ধর্ম
(Properties of Ratio and Proportion)

(i) $a:b=x:y$ এবং $c:d=x:y$ হলে, $a:b=c:d$

(ii) $a:b=b:a$ হলে, $a=b$

(iii) $a:b=x:y$ হলে, $b:a=y:x$ (ব্যস্তকরণ)

(iv) $a:b=x:y$ হলে, $a:x=b:y$ (একান্তরকরণ)

(v) $a:b=c:d$ হলে, $ad=bc$ (আড়গুণন)

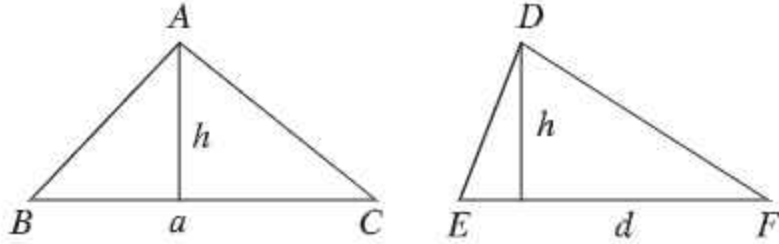
(vi) $a:b=x:y$ হলে, $a+b:b=x+y:y$ (যোজন)

এবং $a-b:b=x-y:y$ (বিয়োজন)

(vii) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (যোজন ও বিয়োজন)

জ্যামিতিক সমানুপাত (Geometric proportions)

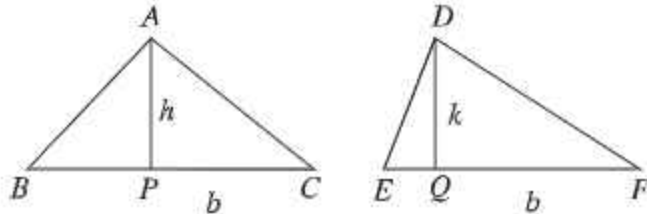
আমরা ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছি। এ থেকে দুইটি প্রয়োজনীয় অনুপাতের ধারণা তৈরি করা যায়।

১. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা সমান হলে, এদের ক্ষেত্রফল ও ভূমি সমানুপাতিক।

মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর ভূমি যথাক্রমে $BC = a$, $EF = d$ এবং উভয় ক্ষেত্রের উচ্চতা h।

সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times a \times h$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times d \times h$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল: ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times a \times h : \frac{1}{2} \times d \times h = a : d = BC : EF$।

২. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমি সমান হলে, এদের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা সমানুপাতিক।

মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর উচ্চতা যথাক্রমে $AP = h$, $DQ = k$ এবং উভয় ক্ষেত্রের ভূমি b।

সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times b \times h$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times b \times k$

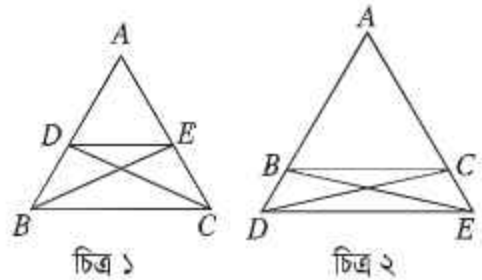
অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল: ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times b \times h : \frac{1}{2} \times b \times k = h : k = AP : DQ$

উপপাদ্য ২৮. ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে বা এদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

বিশেষ নির্বচন: ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে (চিত্র-১) অথবা এদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে (চিত্র-২) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD : DB = AE : EC$

অঙ্কন: B, E এবং C, D যোগ করি।

চিত্র ১ চিত্র ২

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle ADE$ এবং $\triangle BDE$ একই উচ্চতাবিশিষ্ট

$$\therefore \frac{\triangle ADE}{\triangle BDE} = \frac{AD}{DB}$$ [একই উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক]

ধাপ ২. $\triangle ADE$ এবং $\triangle DEC$ একই উচ্চতাবিশিষ্ট

$$\therefore \frac{\triangle ADE}{\triangle DEC} = \frac{AE}{EC}$$ [একই উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক]

ধাপ ৩. কিন্তু $\triangle BDE = \triangle DEC$ [একই ভূমি DE ও একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত]

$$\therefore \frac{\triangle ADE}{\triangle BDE} = \frac{\triangle ADE}{\triangle DEC}$$

ধাপ ৪. অতএব, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

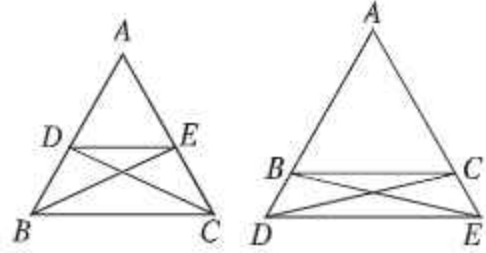
অর্থাৎ, $AD : DB = AE : EC$

অনুসিদ্ধান্ত ১. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২. ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উপপাদ্য ২৮ এর বিপরীত প্রতিজ্ঞাও সত্য। অর্থাৎ কোনো সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে অথবা এদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে। নিচে প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ করা হলো।

উপপাদ্য ২৯. কোনো সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।

বিশেষ নির্বচন: DE রেখাংশ ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা এদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করেছে।
অর্থাৎ $AD : DB = AE : EC$
প্রমাণ করতে হবে যে, DE এবং BC সমান্তরাল।
অঙ্কন: B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle BDE} = \dfrac{AD}{DB}$ [ত্রিভুজ দুইটি একই উচ্চতাবিশিষ্ট]

এবং $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle DEC} = \dfrac{AE}{EC}$ [ত্রিভুজ দুইটি একই উচ্চতাবিশিষ্ট]

ধাপ ২. কিন্তু $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ [স্বীকার]

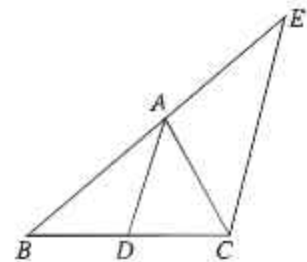
ধাপ ৩. অতএব, $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle BDE} = \dfrac{\triangle ADE}{\triangle DEC}$ [(১) এবং (২) থেকে]

$\therefore \triangle BDE = \triangle DEC$

ধাপ ৪. কিন্তু $\triangle BDE$ এবং $\triangle DEC$ একই ভূমি DE এর একই পাশে অবস্থিত। সুতরাং তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore BC$ ও DE সমান্তরাল।

উপপাদ্য ৩০. ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, AD রেখাংশ $\triangle ABC$ এর অন্তঃস্থ $\angle A$ কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD : DC = BA : AC$
অঙ্কন: DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি, যেন তা বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ:

ধাপ ১. যেহেতু $DA \parallel CE$ এবং BE এদের ছেদক [অঙ্কন]

$\angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোণ]

আবার $DA \parallel CE$ এবং AC এদের ছেদক

$\angle ACE = \angle CAD$ [একান্তর কোণ]

ধাপ ২. কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$ [স্বীকার]

$\therefore \angle AEC = \angle ACE$ সুতরাং $AC = AE$ [অধ্যায় ৬ উপপাদ্য ৮]

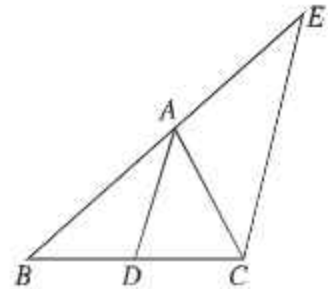
ধাপ ৩. আবার যেহেতু, $DA \parallel CE$ সুতরাং $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$ [ধাপ ২]

ধাপ ৪. কিন্তু $AE = AC$

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$

উপপাদ্য ৩১. ত্রিভুজের যেকোনো বাহু অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, বিভাগ বিন্দু থেকে বিপরীত শীর্ষ বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশ উক্ত শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজের A বিন্দু থেকে অঙ্কিত AD সরলরেখাংশ BC বাহুকে D বিন্দুতে এরূপে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে যে, $BD : DC = BA : AC$। প্রমাণ করতে হবে যে, AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ, $\angle BAD = \angle CAD$

অঙ্কন: DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি, যেন তা বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle BCE$ এর $DA \parallel CE$ [অঙ্কন]

$\therefore BA : AE = BD : DC$ [উপপাদ্য ২৮]

ধাপ ২. কিন্তু $BD : DC = BA : AC$ [স্বীকার]

$\therefore BA : AE = BA : AC$ [ধাপ ১ ও ধাপ ২ থেকে]

$\therefore AE = AC$

অতএব, $\angle ACE = \angle AEC$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ ৩. কিন্তু $\angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACE = \angle CAD$ [একান্তর কোণ]

অতএব, $\angle BAD = \angle CAD$ [ধাপ ২ থেকে]

$\therefore$ AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

অনুশীলনী ১৪.১

১. কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY, ভূমির সমান্তরাল হলে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

২. প্রমাণ কর যে, কতকগুলো পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখাকে দুইটি সরলরেখা ছেদ করলে অনুরূপ অংশগুলো সমানুপাতিক হবে।

৩. প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় এদের ছেদবিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হয়।

৪. প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।

৫. ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE এর সমান্তরাল রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AC = 6EF$।

৬. $\triangle ABC$ এর BC বাহুস্থ যেকোনো বিন্দু X এবং AX রেখাস্থ O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\triangle AOB : \triangle AOC = BX : XC$

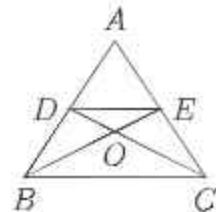
৭. $\triangle ABC$ এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BE : CF$

৮. ABC ও DEF সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা AM ও DN হলে প্রমাণ কর যে, $AM : DN = AB : DE$।

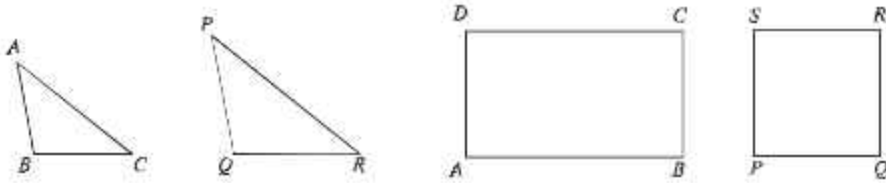
৯. পাশের চিত্রে $BC \parallel DE$

ক) প্রমাণ কর $\triangle BOC$ ও $\triangle DOE$ সদৃশ।

খ) প্রমাণ কর, $AD : BD = AE : CE$।

গ) প্রমাণ কর, $BO : OE = CO : OD$।

সদৃশতা (Similarity)

সপ্তম শ্রেণিতে ত্রিভুজের সর্বসমতা ও সদৃশতা নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। সাধারণভাবে, সর্বসমতা সদৃশতার বিশেষ রূপ। দুইটি চিত্র সর্বসম হলে সেগুলো সদৃশ; তবে চিত্র দুইটি সদৃশ হলে সেগুলো সর্বসম নাও হতে পারে।

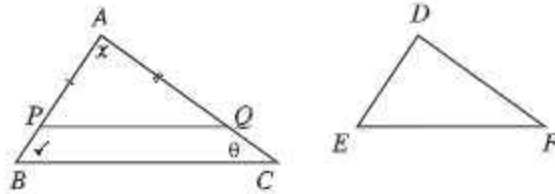
সদৃশকোণী বহুভুজ: সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী (equiangular) বলা হয়।

সদৃশ বহুভুজ: সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির (১) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (২) অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ (similar) বহুভুজ বলা হয়।

উপরের চিত্রে আমরা লক্ষ করি যে, $ABCD$ আয়ত ও $PQRS$ বর্গ সদৃশকোণী। কারণ, উভয় চিত্রে বাহুর সংখ্যা 4 এবং আয়তের কোণগুলো ধারাবাহিকভাবে বর্গটির কোণগুলোর সমান (সবগুলো কোণ সমকোণ)। কিন্তু চিত্রগুলোর অনুরূপ কোণগুলো সমান হলেও অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান নয়। ফলে সেগুলো সদৃশও নয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অবশ্য এরকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে সদৃশতার সংজ্ঞায় উল্লেখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হলে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশও হয়। অর্থাৎ, দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশকোণী এবং দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে এবং এদের কোনো এক জোড়া অনুরূপ বাহু সমান হলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হয়। দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত ধ্রুবক। নিচে এ সংক্রান্ত উপপাদ্যের প্রমাণ দেওয়া হলো।

উপপাদ্য ৩২. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে এদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

অঙ্কন: ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগল অসমান বিবেচনা করি। AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC বাহুতে Q বিন্দু নিই যেন $AP = DE$ এবং $AQ = DF$ হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle APQ$ ও $\triangle DEF$ এর $AP = DE,\ AQ = DF,\ \angle A = \angle D$

অতএব, $\triangle APQ \cong \triangle DEF$ [বাহু-কোণ-বাহুর সর্বসমতা]

সুতরাং, $\angle APQ = \angle DEF = \angle ABC$ এবং $\angle AQP = \angle DFE = \angle ACB$।

অর্থাৎ, PQ রেখাংশ ও BC বাহুকে AB বাহু ও AC রেখা ছেদ করায় অনুরূপ কোণযুগল সমান হয়েছে।

সুতরাং $PQ \parallel BC$ $\quad \therefore \dfrac{AB}{AP} = \dfrac{AC}{AQ}$ বা, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ [অনুসিদ্ধান্ত ১]

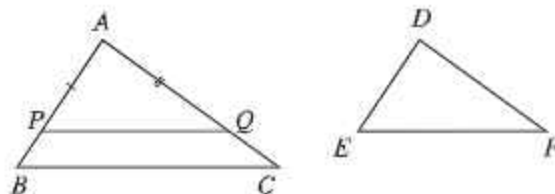
ধাপ ২. একইভাবে BA বাহু ও BC বাহু থেকে যথাক্রমে ED রেখাংশ ও EF রেখাংশের সমান রেখাংশ কেটে নিয়ে দেখানো যায় যে,

$\dfrac{BA}{ED} = \dfrac{BC}{EF}$ [উপপাদ্য ২৮]

অর্থাৎ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ $\quad \therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

উপপাদ্য ৩২ এর বিপরীত প্রতিজ্ঞাটিও সত্য।

উপপাদ্য ৩৩. দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$।

অঙ্কন: $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগল অসমান বিবেচনা করি। AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC বাহুতে Q বিন্দু নিই যেন $AP = DE$ এবং $AQ = DF$ হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

প্রমাণ:

যেহেতু $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$, সুতরাং $\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{AC}{AQ}$

সুতরাং $PQ \parallel BC$ [উপপাদ্য ২৯]

$\therefore \angle ABC = \angle APQ$ [AB ছেদক দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACB = \angle AQP$ [AC ছেদক দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]

$\therefore \triangle ABC$ ও $\triangle APQ$ সদৃশকোণী।

সুতরাং, $\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{BC}{PQ}$ বা, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{PQ}$ [উপপাদ্য ৩২]

কিন্তু $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ [কল্পনানুসারে]

$\therefore \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{BC}{PQ}$

$\therefore EF = PQ$

সুতরাং $\triangle APQ$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম। [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

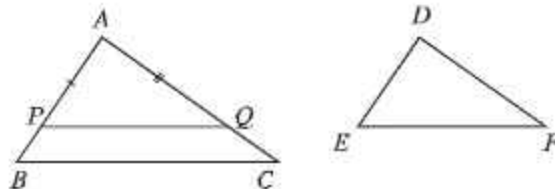
$\therefore \angle PAQ = \angle EDF,\ \angle APQ = \angle DEF,\ \angle AQP = \angle DFE$

$\therefore \angle APQ = \angle ABC$ এবং $\angle AQP = \angle ACB$

$\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

উপপাদ্য ৩৪. দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান হলে এবং সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এমন যে, $\angle A = \angle D$ এবং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ।

অঙ্কন: $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগল অসমান বিবেচনা করি। AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC বাহুতে Q বিন্দু নিই যেন $AP = DE$ এবং $AQ = DF$ হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

প্রমাণ:

$\triangle APQ$ ও $\triangle DEF$ এর $AP = DE,\ AQ = DF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle A =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle D$

$\therefore \triangle APQ \cong \triangle DEF$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle A = \angle D,\ \angle APQ = \angle E,\ \angle AQP = \angle F$

আবার যেহেতু $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$, সুতরাং $\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{AC}{AQ}$ [উপপাদ্য ২৯]

$\therefore PQ \parallel BC$

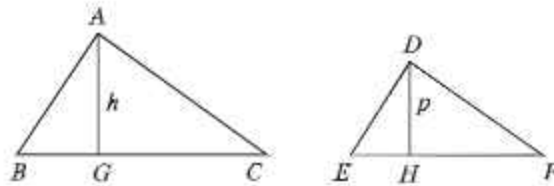
সুতরাং $\angle ABC = \angle APQ$ এবং $\angle ACB = \angle AQP$

$\therefore\ \angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E$, এবং $\angle C = \angle F$

অর্থাৎ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশকোণী।

সুতরাং $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ।

উপপাদ্য ৩৫. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত এদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং এদের অনুরূপ বাহু BC ও EF। প্রমান করতে হবে যে, $\triangle ABC : \triangle DEF = BC^2 : EF^2$

অঙ্কন: BC ও EF এর উপর যথাক্রমে AG ও DH লম্ব আঁকি। মনে করি $AG = h,\ DH = p$।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times BC \times h$ এবং $\triangle DEF = \dfrac{1}{2} \times EF \times p$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times h}{\frac{1}{2} \times EF \times p} = \frac{h}{p} \times \frac{BC}{EF}$$

ধাপ ২. ABG ও DEH ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle B = \angle E$, $\angle AGB = \angle DHE$ [এক সমকোণ]

$\therefore \angle BAG = \angle EDH$

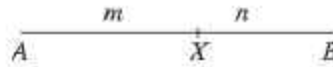
$\therefore \triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, তাই সদৃশ।

$\therefore \frac{h}{p} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ [কারণ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ]

ধাপ ৩. $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{h}{p} \times \frac{BC}{EF} = \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$

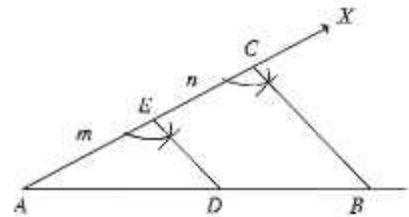
নির্দিষ্ট অনুপাতে রেখাংশের বিভক্তিকরণ

সমতলে দুইটি ভিন্ন বিন্দু A ও B এবং m ও n যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে স্বীকার করে নিই যে, রেখায় এমন অনন্য বিন্দু X আছে যে, X বিন্দুটি A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী এবং $AX : XB = m : n$।

m n
A X B

ওপরের চিত্রে, AB রেখাংশ X বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে। তাহলে, $AX : XB = m : n$

সম্পাদ্য ১২. কোনো রেখাংশকে একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে।

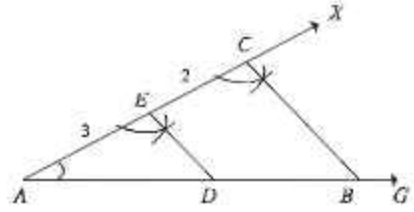
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, AB রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে।

অঙ্কন: A বিন্দুতে যেকোনো কোণ $\angle BAX$ অঙ্কন করি এবং AX রশ্মি থেকে পরপর $AE = m$ এবং $EC = n$ অংশ কেটে নিই। B, C যোগ করি। E বিন্দু দিয়ে CB এর সমান্তরাল ED রেখাংশ অঙ্কন করি যা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB রেখাংশ D বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলো।

প্রমাণ: যেহেতু DE রেখাংশ ABC ত্রিভুজের এক বাহু BC এর সমান্তরাল,

$\therefore AD : DB = AE : EC = m : n$

কাজ: বিকল্প পদ্ধতিতে কোনো রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত কর।

উদাহরণ ১. 7 সে.মি. দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশকে $3 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত কর।

সমাধান: যেকোনো একটি রশ্মি AG আঁকি এবং AG থেকে 7 সে.মি. সমান রেখাংশ AB নিই। A বিন্দুতে যেকোনো কোণ $\angle BAX$ অঙ্কন করি। AX রশ্মি থেকে $AE = 3$ সে.মি. কেটে নিই এবং EX থেকে $EC = 2$ সে.মি. কেটে নিই। B, C যোগ করি। E বিন্দুতে $\angle ACB$ এর সমান $\angle AED$ অঙ্কন করি যার ED রেখা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB রেখাংশ D বিন্দুতে $3 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলো।

কাজ: একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর যার বাহুগুলো মূল ত্রিভুজের বাহুগুলোর $\frac{3}{5}$ গুণ।

অনুশীলনী ১৪.২

১. $\triangle ABC$ এ BC এর সমান্তরাল DE রেখা AB ও AC কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করলে

(i) $\triangle ABC$ ও $\triangle ADE$ পরস্পর সদৃশ।

(ii) $\frac{AD}{BD} = \frac{CE}{AE}$

(iii) $\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{BC^2}{DE^2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

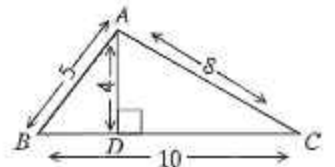
ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

পাশের চিত্রের তথ্যানুসারে ২ ও ৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

২. $\triangle ABC$ এর উচ্চতা ও ভূমির অনুপাত কত?

ক) $\frac{1}{2}$ খ) $\frac{4}{5}$ গ) $\frac{2}{5}$ ঘ) $\frac{5}{4}$

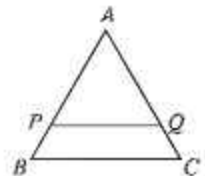
৩. $\triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক) 6 খ) 20 গ) 40 ঘ) 50

৪. $\triangle ABC$ এ $PQ \parallel BC$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $AP : PB = AQ : QC$

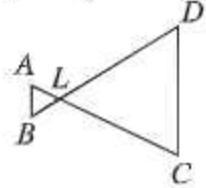
খ) $AB : PQ = AC : PQ$

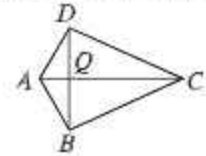
গ) $AB : AC = PQ : BC$

ঘ) $PQ : BC = BP : BQ$

৫. প্রমাণ কর যে, দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটি যদি তৃতীয় একটি ত্রিভুজের সদৃশ হয়, তবে তারা পরস্পর সদৃশ।

৬. প্রমাণ কর যে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির একটি সূক্ষ্মকোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।

৭. প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক শীর্ষ থেকে অতিভুজের উপর লম্ব আঁকলে যে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তারা পরস্পর সদৃশ এবং প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সদৃশ।

৮. পাশের চিত্রে, $\angle B = \angle D$ এবং $CD = 4AB$। প্রমাণ কর যে, $BD = 5BL$।

৯. $ABCD$ সামন্তরিকের A শীর্ষ দিয়ে অঙ্কিত একটি রেখাংশ BC বাহুকে M বিন্দুতে এবং DC বাহুর বর্ধিতাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $BM \times DN$ একটি ধ্রুবক।

১০. পাশের চিত্রে $BD \perp AC$ এবং $DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2}QC$ প্রমাণ কর যে, $DA \perp DC$

১১. $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর $\angle A = \angle D$। প্রমাণ কর যে, $\triangle ABC : \triangle DEF = AB \cdot AC : DE \cdot DF$

১২. $\triangle ABC$ এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

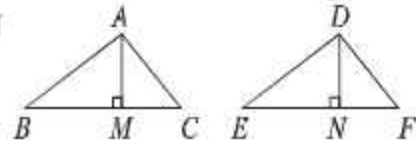
ক) তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর।

খ) প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BA : AC$

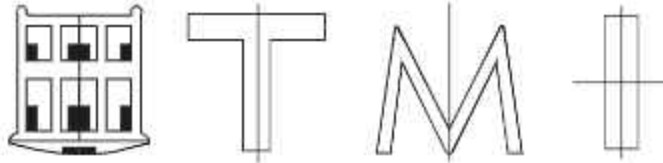
গ) BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BP : CQ$

১৩. চিত্রে ABC এবং DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ।

ক) ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলোর নাম লিখ।

খ) প্রমাণ কর যে,
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

গ) যদি $BC = 3$ সে.মি., $EF = 8$ সে.মি., $\angle B = 60°$, $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$ এবং $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল 3 বর্গ সে.মি. হয়, তবে $\triangle DEF$ অঙ্কন কর এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

প্রতিসমতা (Symmetry)

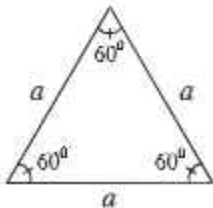
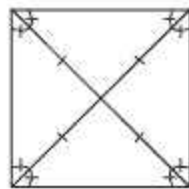
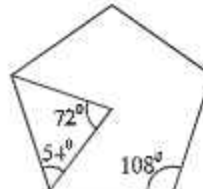
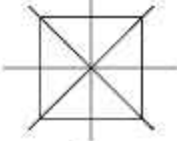
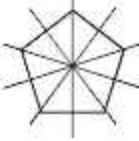
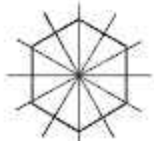
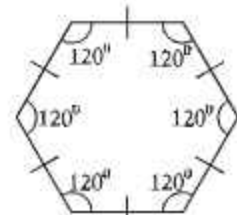
প্রতিসমতা একটি প্রয়োজনীয় জ্যামিতিক ধারনা যা প্রকৃতিতে বিদ্যমান এবং যা আমাদের কর্মকাণ্ডে প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকি। প্রতিসমতার ধারনাকে শিল্পী, কারিগর, ডিজাইনার, ছুতাররা প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকেন। গাছের পাতা, ফুল, মৌচাক, ঘরবাড়ি, টেবিল, চেয়ার সব কিছুর মধ্যে প্রতিসমতা বিদ্যমান। যদি কোনো সরলরেখা বরাবর কোনো চিত্র ভাঁজ করলে তার অংশ দুইটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় সেক্ষেত্রে সরলরেখাটিকে প্রতিসাম্য রেখা বলা হয়।

উপরের চিত্রগুলোর প্রতিটির প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

কাজ:

ক) সুমি কাগজ কেটে পাশের চিত্রের ডিজাইন তৈরি করেছে। চিত্রে প্রতিসম রেখাসমূহ চিহ্নিত কর। এর কয়টি প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে?

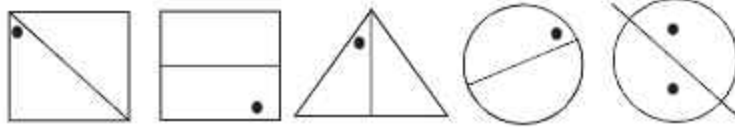
খ) ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে সেগুলো লিখে প্রতিসাম্য রেখা চিহ্নিত কর।

সুষম বহুভুজের প্রতিসাম্য রেখা (Lines of symmetry of a regular polygon)

বহুভুজ কতকগুলো রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র। বহুভুজের রেখাংশগুলোর দৈর্ঘ্য সমান ও কোণগুলো সমান হলে একে সুষম বহুভুজ বলা হয়। ত্রিভুজ হলো সবচেয়ে কম সংখ্যক রেখাংশ দিয়ে গঠিত বহুভুজ। সমবাহু ত্রিভুজ হলো তিন বাহু বিশিষ্ট সুষম বহুভুজ। সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান। চার বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ হলো বর্গক্ষেত্র। বর্গক্ষেত্রের বাহু ও কোণগুলো সমান। অনুরূপভাবে, সুষম পঞ্চভুজ ও সুষম ষড়ভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান।

সমবাহু ত্রিভুজ বর্গক্ষেত্র সুষম পঞ্চভুজ সুষম ষড়ভুজ

প্রত্যেক সুষম বহুভুজ একটি প্রতিসম চিত্র। সুতরাং এদের প্রতিসাম্য রেখার সম্পর্কে জানা আবশ্যক। সুষম বহুভুজের অনেক বাহুর পাশাপাশি একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

প্রতিসমতার ধারণার সাথে আয়নার প্রতিফলনের সম্পর্ক রয়েছে। কোনো জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা তখনই থাকে, যখন তার অর্ধাংশের প্রতিচ্ছবি বাকি অর্ধাংশের সাথে মিলে যায়। এজন্য প্রতিসাম্য রেখা নির্ণয়ে কাল্পনিক আয়নার অবস্থান রেখার সাহায্য নেওয়া হয়। রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।

কাজ:

ক) প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে, অন্য ফোটা প্রদর্শন কর:

খ) নিচের জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা নির্ণয় কর:

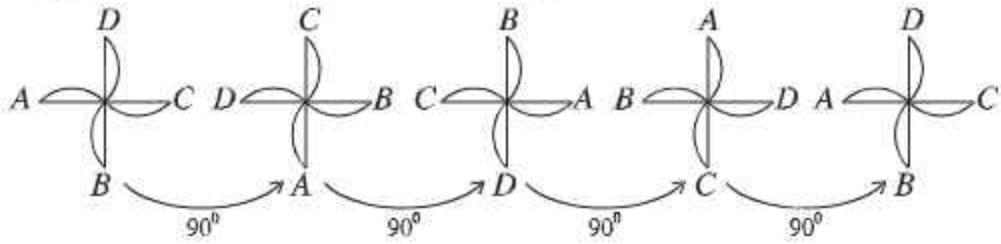
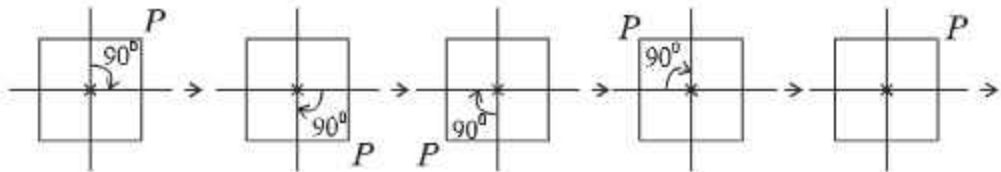
(১) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (২) বিষমবাহু ত্রিভুজ (৩) বর্গক্ষেত্র
(৪) রম্বস (৫) সুষম ষড়ভুজ (৬) পঞ্চভুজ
(৭) বৃত্ত

ঘূর্ণন প্রতিসমতা (Rotational symmetry)

কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণনের ফলে বস্তুর আকৃতি ও আকারের পরিবর্তন হয় না। তবে বস্তুর বিভিন্ন অংশের অবস্থানের পরিবর্তন হয়। ঘূর্ণনের ফলে বস্তুর নতুন অবস্থানে বস্তুর আকৃতি ও আকার আদি অবস্থানের ন্যায় একই হলে আমরা বলি বস্তুটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। যেমন, সাইকেলের চাকা, সিলিং ফ্যান, বর্গ ইত্যাদি। একটি সিলিং ফ্যানের পাখাগুলোর ঘূর্ণনের ফলে একাধিকবার মূল অবস্থানের সাথে মিলে যায়। পাখাগুলো ঘড়ির কাঁটার দিকেও ঘুরতে পারে আবার বিপরীত দিকেও ঘুরতে পারে। সাইকেলের চাকা ঘড়ির কাঁটার দিকেও ঘুরতে পারে, আবার বিপরীত দিকেও ঘুরতে পারে। ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণনকে ধনাত্মক দিক হিসেবে ধরা হয়।

যে বিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুটি ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কেন্দ্র। ঘূর্ণনের সময় যে পরিমান কোণে ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কোণ। একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের কোণের পরিমাণ 360°, অর্ধ ঘূর্ণনের কোণের পরিমাণ 180°।

চিত্রে চার পাখা বিশিষ্ট ফ্যানের 90° করে ঘূর্ণনের ফলে বিভিন্ন অবস্থান দেখানো হয়েছে। লক্ষ করি, একবার পূর্ণ ঘূর্ণনে ঠিক চারটি অবস্থানে (90°, 180°, 270°, 360° কোণে ঘূর্ণনের ফলে) ফ্যানটি

দেখতে হুবহু একই রকম। এজন্য বলা হয় ফ্যানটির ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 4।

ঘূর্ণন প্রতিসমতার অন্য একটি উদাহরণ নেওয়া যায়। একটি বর্গের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দুকে ঘূর্ণন কেন্দ্র ধরি। ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে বর্গটির এক-চতুর্থাংশ ঘূর্ণনের ফলে যেকোনো কৌণিক বিন্দুর অবস্থান দ্বিতীয় চিত্রের ন্যায় হবে। এভাবে চারবার এক-চতুর্থাংশ ঘূর্ণনের ফলে বর্গটি আদি অবস্থানে ফিরে আসে। বলা হয়, বর্গের 4 মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।

লক্ষ করি, যেকোনো চিত্র একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের ফলে আদি অবস্থানে ফিরে আসে। তাই যেকোনো জ্যামিতিক চিত্রের 1 মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।

ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিচের বিষয়গুলো লক্ষ রাখতে হবে:

ক) ঘূর্ণন কেন্দ্র

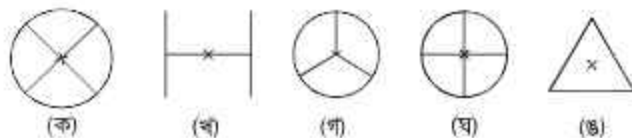
খ) ঘূর্ণন কোণ

গ) ঘূর্ণনের দিক

ঘ) ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা

কাজ:

ক) তোমার চারপাশের পরিবেশ থেকে 5টি সমতলীয় বস্তুর উদাহরণ দাও যাদের ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।

খ) নিচের চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর।

রেখা প্রতিসমতা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা (Line symmetry and rotational symmetry)

আমরা দেখেছি যে, কিছু জ্যামিতিক চিত্রের শুধু রেখা প্রতিসমতা রয়েছে, কিছুর শুধু ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। আবার কোনো কোনো চিত্রের রেখা প্রতিসমতা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা উভয়ই বিদ্যমান। বর্গের যেমন চারটি প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে, তেমনি 4 মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।

বৃত্ত একটি আদর্শ প্রতিসম চিত্র। বৃত্তকে এর কেন্দ্রের সাপেক্ষে যে কোনো কোণে ও যেকোনো দিকে ঘুরালে এর অবস্থানের পরিবর্তন লক্ষ করা যায় না। অতএব, বৃত্তের ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা অসীম। একই সময় বৃত্তের কেন্দ্রগামী যেকোনো রেখা এর প্রতিসাম্য রেখা। সুতরাং, বৃত্তের অসংখ্য প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

কাজ: ইংরেজি বর্ণমালার কয়েকটি বর্ণের রেখা প্রতিসমতা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ধারণ কর এবং নিচের সারণিটি পূরণ কর: (একটি করে দেখানো হলো)

বর্ণ	রেখা প্রতিসমতা	প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা	ঘূর্ণন প্রতিসমতা	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা
Z	নেই	0	হ্যাঁ	2
H				
O				
E				
C				

অনুশীলনী ১৪.৩

১. সমতলীয় জ্যামিতিতে–

(i) ত্রিভুজ হলো সবচেয়ে কম সংখ্যক রেখাংশ দিয়ে গঠিত বহুভুজ।

(ii) চার বাহু বিশিষ্ট সুষম বহুভুজ হলো রম্বস।

(iii) সুষম পঞ্চভুজের বাহুগুলো সমান হলেও কোণগুলো অসমান।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) i ও ii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

২. বিষমবাহু ত্রিভুজের মোট কতটি প্রতিসাম্য রেখা আছে?

ক) শূন্যটি খ) একটি গ) তিনটি ঘ) অসংখ্য

চিত্র হতে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও। বহুভুজটির প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।

৩. বহুভুজটির মোট কতটি প্রতিসাম্য রেখা আছে?

ক) 3টি খ) 6টি গ) 7টি ঘ) অসংখ্য

৪. বহুভুজটির-

(i) ঘূর্ণন মাত্রা 4

(ii) ঘূর্ণন কোণ 60°

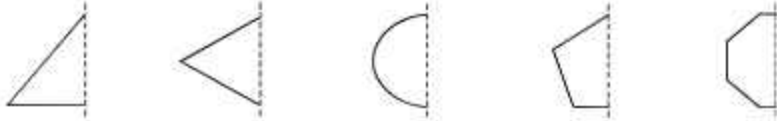
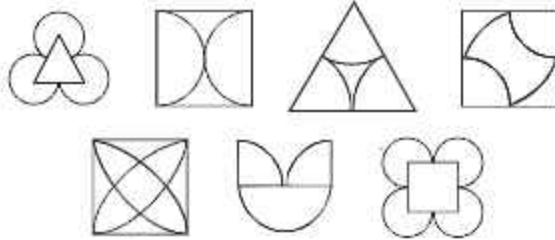
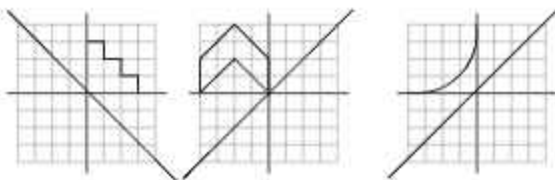
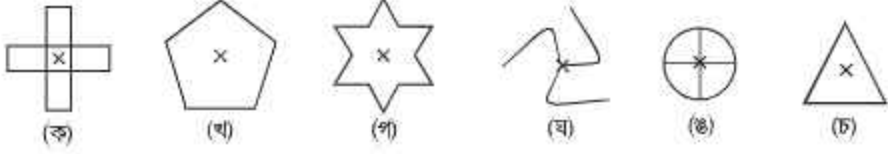
(iii) প্রতিটি কোণ সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৫. নিচের কোনটির প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে?

ক) বাড়ির চিত্র খ) মসজিদের চিত্র গ) মন্দিরের চিত্র
ঘ) গির্জার চিত্র ঙ) প্যাগোডার চিত্র চ) পার্লামেন্ট ভবনের চিত্র
ছ) মুখোশের চিত্র জ) তাজমহলের চিত্র

৬. প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে (ড্যাশযুক্ত রেখা), জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ কর এবং শনাক্ত কর:

৭. নিচের জ্যামিতিক চিত্রে প্রতিসাম্য রেখা নির্দেশ কর:

৮. নিচের অসম্পূর্ণ জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ কর যেন আয়না রেখা সাপেক্ষে প্রতিসম হয়:

৯. চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর:

১০. ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের:

ক) অনুভূমিক আয়না

খ) উল্লম্ব আয়না

গ) অনুভূমিক ও উল্লম্ব উভয় আয়না

সাপেক্ষে প্রতিফলন প্রতিসমতা রয়েছে সেগুলো আঁক।

১১. প্রতিসমতা নেই এমন তিনটি চিত্র অঙ্কন কর।

১২. একটি লেবু আড়াআড়ি কেটে চিত্রের ন্যায় আকার পাওয়া গেল। সমতলীয় চিত্রটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর।

১৩. শূন্যস্থান পূরণ কর:

চিত্র	ঘূর্ণন কেন্দ্র	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা	ঘূর্ণন প্রতিসমতার কোণ
বর্গ			
আয়ত			
রম্বস			
সমবাহু ত্রিভুজ			
অর্ধবৃত্ত			
সুষম পঞ্চভুজ			

১৪. যে সকল চতুর্ভুজের রেখা প্রতিসমতা ও 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে, এদের তালিকা কর।

১৫. 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে এরূপ চিত্রের ঘূর্ণন কোণ 18° হতে পারে কি? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

অধ্যায় ১৫

ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

(Area Related Theorems and Constructions)

আমরা জানি সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের আকৃতি বিভিন্ন রকম হতে পারে। সমতলক্ষেত্র যদি চারটি বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ হয়, তবে একে আমরা চতুর্ভুজ বলে থাকি। এই চতুর্ভুজের আবার শ্রেণিবিভাগ আছে এবং আকৃতি ও বৈশিষ্ট্যের উপর ভিত্তি করে এদের নামকরণও করা হয়েছে। এই সকল সমতলক্ষেত্রের বাইরে অনেক ক্ষেত্র আছে যাদের বাহু চারের অধিক। আলোচিত এ সকল ক্ষেত্রই বহুভুজক্ষেত্র। প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের নির্দিষ্ট পরিমাপ আছে যাকে ক্ষেত্রফল বলে অভিহিত করা হয়। এই সকল ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ব্যবহার করা হয় এবং এদের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে লেখা হয়। যেমন, বাংলাদেশের ক্ষেত্রফল 147 হাজার বর্গ কিলোমিটার (প্রায়)। আমাদের দৈনন্দিন জীবনের প্রয়োজন মেটাতে বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল জানতে ও পরিমাপ করতে হয়। তাই এই শ্রেণির শিক্ষার্থীদের বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান প্রদান করা অতীব গুরুত্বপূর্ণ। এখানে বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারণা এবং এতদসংক্রান্ত কতিপয় উপপাদ্য ও সম্পাদ্য বিষয়ক বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

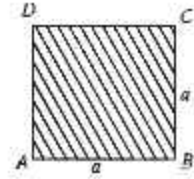
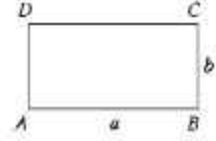
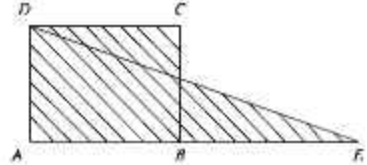
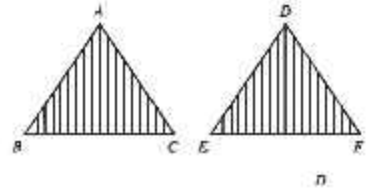
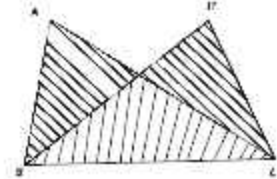
- ► বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ► ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- ► প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে বহুভুজক্ষেত্র অঙ্কন ও অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।
- ► ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান চতুর্ভুজক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- ► চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ত্রিভুজক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারবে।

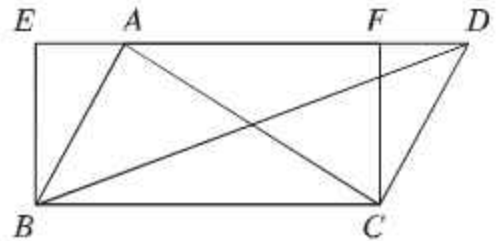
সমতলক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে। এই ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। যেমন, যে বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য এক সেন্টিমিটার তার ক্ষেত্রফল হবে এক বর্গসেন্টিমিটার।

আমরা জানি,

ক) $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $AB = a$ একক (যথা: মিটার), প্রস্থ $BC = b$ একক (যথা: মিটার) হলে, $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= ab$ বর্গ একক (যথা: বর্গমিটার)।

খ) $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$ একক (যথা: মিটার) হলে, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ একক (যথা: বর্গমিটার)।

দুইটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে এদের মধ্যে $=$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেমন, $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= AED$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, যেখানে $AB = BE$

উল্লেখ্য যে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম হলে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ লেখা হয়। এ ক্ষেত্রে অবশ্যই $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle DEF$ এর ক্ষেত্রফল।

কিন্তু দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয় না। যেমন, চিত্রে $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle DBC$ এর ক্ষেত্রফল। কিন্তু $\triangle ABC$ ও $\triangle DBC$ সর্বসম নয়।

উপপাদ্য ৩৬. একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান।

মনে করি, ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \Delta DBC$ এর ক্ষেত্রফল।

অঙ্কন: BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে BE ও CF লম্ব আঁকি, যা DA এর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে এবং AD রেখাকে F বিন্দুতে ছেদ করে। ফলে $EBCF$ একটি আয়তক্ষেত্র তৈরি হয়।

প্রমাণ: ΔABC এর ভূমি BC এবং উচ্চতা BE

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times BE \ldots\ldots\ldots (i)$

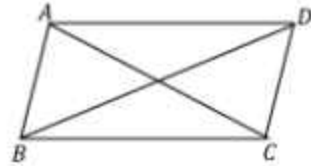
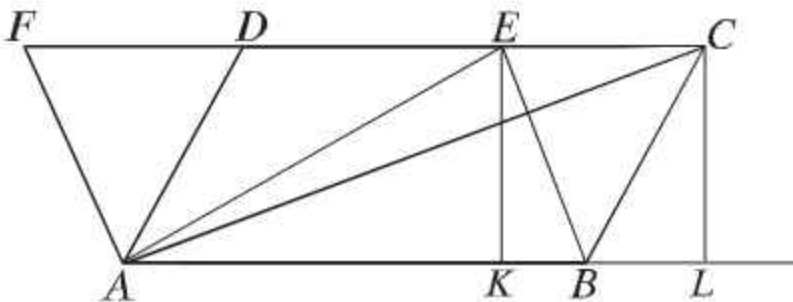
আবার, ΔDBC এর ভূমি BC এবং উচ্চতা CF

$\therefore$ ΔDBC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times CF = \frac{1}{2} \times BC \times BE \ldots\ldots\ldots (ii)$; [$EBCF$ আয়তক্ষেত্র]
(i) ও (ii) নং তুলনা করে পাই, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=$ ΔDBC এর ক্ষেত্রফল। (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত ১. একই ভূমির একই পাশে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে, এরা একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২. কোনো ত্রিভুজ ও সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।
ইঙ্গিত: চিত্রে, $ABCD$ সামান্তরিক। AC কর্ণ।

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $ABCD$

উপপাদ্য ৩৭. একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

চিত্রে, $ABCD$ ও $ABEF$ সামান্তরিকক্ষেত্র দুইটি একই ভূমি AB এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল AB ও FC এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $=$ $ABEF$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

অঙ্কন: A, C ও A, E যোগ করি। C ও E বিন্দু থেকে ভূমি AB ও এর বর্ধিত রেখাংশের উপর EK ও CL লম্ব টানি।

প্রমাণ: $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times CL$ এবং

$\triangle ABE$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times EK$

যেহেতু $CL = EK$, [অঙ্কনানুসারে $AL \parallel FC$]

অতএব, $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle ABE$ এর ক্ষেত্রফল

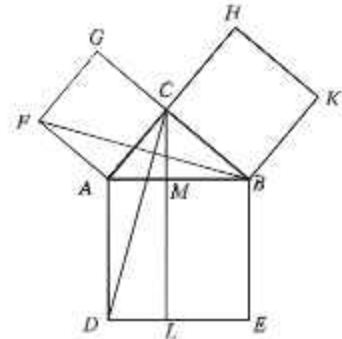
$\implies \frac{1}{2}$ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABEF$ এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $ABEF$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৩৮. পিথাগোরাসের উপপাদ্য

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB$ সমকোণ এবং AB অতিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = BC^2 + AC^2$।

অঙ্কন: AB, AC এবং BC বাহুর উপর যথাক্রমে $ABED$, $ACGF$ এবং $BCHK$ বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। C বিন্দু দিয়ে AD বা BE রেখার সমান্তরাল CL রেখা আঁকি। মনে করি, তা AB কে M বিন্দুতে এবং DE কে L বিন্দুতে ছেদ করে। C ও D এবং B ও F যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle CAD$ ও $\triangle BAF$ তে $CA = AF$, $AD = AB$ এবং

অন্তর্ভুক্ত $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAB + \angle CAF =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle BAF$ [$\angle BAD = \angle CAF = 1$ সমকোণ]

অতএব, $\triangle CAD \cong \triangle BAF$

ধাপ ২. $\triangle CAD$ এবং আয়তক্ষেত্র $ADLM$ একই ভূমি AD এর উপর এবং AD ও CL সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং আয়তক্ষেত্র $ADLM = 2\ \triangle CAD$ [উপপাদ্য ৩৭]

ধাপ ৩. $\triangle BAF$ এবং বর্গক্ষেত্র $ACGF$ একই ভূমি AF এর উপর এবং AF ও BG সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং বর্গক্ষেত্র $ACGF = 2\ \triangle FAB = 2\ \triangle CAD$ [উপপাদ্য ৩৭]

ধাপ ৪. আয়তক্ষেত্র $ADLM =$ বর্গক্ষেত্র $ACGF$

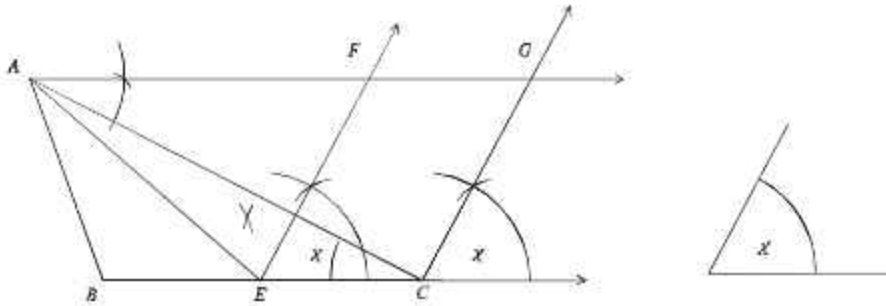
ধাপ ৫. অনুরূপভাবে C, E ও A, K যোগ করে প্রমাণ করা যায় যে,

আয়তক্ষেত্র $BELM =$ বর্গক্ষেত্র $BCHK$

ধাপ ৬. আয়তক্ষেত্র $(ADLM + BELM) =$ বর্গক্ষেত্র $ACGF+$ বর্গক্ষেত্র $BCHK$

বা, বর্গক্ষেত্র $ABED =$ বর্গক্ষেত্র $ACGF+$ বর্গক্ষেত্র $BCHK$

অর্থাৎ, $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (প্রমাণিত)

সম্পাদ্য ১৩. এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে, যার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

মনে করি, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজক্ষেত্র এবং $\angle x$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। এরূপ সামান্তরিক আঁকতে হবে, যার একটি কোণ $\angle x$ এর সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন: BC বাহুকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। EC রেখাংশের E বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CEF$ আঁকি। A বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল AG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা EF রশ্মিকে F বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দু দিয়ে EF রেখাংশের সমান্তরাল CG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা AG রশ্মিকে G বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $ECGF$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: A, E যোগ করি।

এখন, $\triangle ABE$ এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle AEC$ এর ক্ষেত্রফল [যেহেতু ভূমি $BE =$ ভূমি EC এবং উভয়ের একই উচ্চতা]

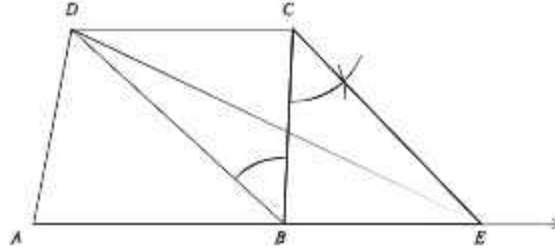
$\therefore \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= 2$ $\triangle AEC$ এর ক্ষেত্রফল

আবার, সামান্তরিক ক্ষেত্র $ECGF$ এর ক্ষেত্রফল $= 2$ $\triangle AEC$ এর ক্ষেত্রফল [যেহেতু, উভয়ে একই ভূমি EC এর উপর অবস্থিত এবং $EC \parallel AG$]

$\therefore$ সামান্তরিক ক্ষেত্র $ECGF$ এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

আবার, $\angle CEF = \angle x$ [যেহেতু $EF \parallel CG$, অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore$ সামান্তরিক $ECGF$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ১৪. এমন একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

মনে করি, $ABCD$ একটি চতুর্ভুজক্ষেত্র। এরূপ একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $ABCD$ চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন: D, B যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে $CE \parallel DB$ টানি। মনে করি, তা AB বাহুর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। D, E যোগ করি। তাহলে, $\triangle DAE$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: BD ভূমির উপর $\triangle BDC$ ও $\triangle BDE$ অবস্থিত এবং $DB \parallel CE$ [অঙ্কন অনুসারে]

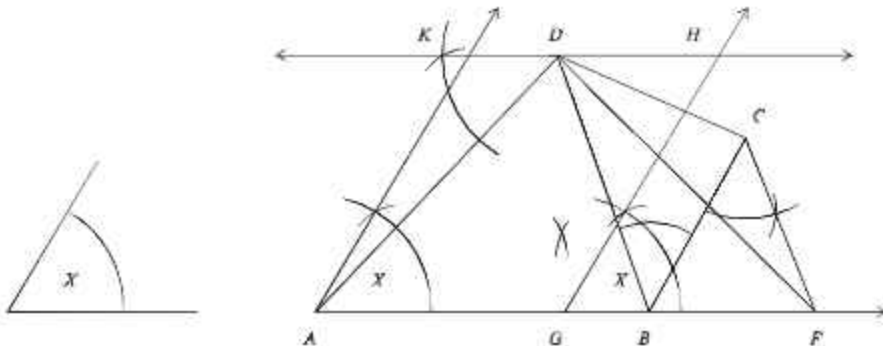
$\therefore \triangle BDC$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle BDE$ এর ক্ষেত্রফল

$\therefore \triangle BDC$ এর ক্ষেত্রফল $+ \triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle BDE$ এর ক্ষেত্রফল $+ \triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল

$\therefore$ চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle ADE$ এর ক্ষেত্রফল

অতএব, $\triangle ADE$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: উপরের পদ্ধতির সাহায্যে নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজক্ষেত্র আঁকা যাবে।

সম্পাদ্য ১৫. এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ দেওয়া আছে এবং তা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

মনে করি, $ABCD$ একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্র এবং $\angle x$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। এরূপ একটি সামান্তরিক

আঁকতে হবে যার একটি কোণ প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান এবং সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $ABCD$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন: B, D যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে $CF \parallel DB$ টানি এবং মনে করি, CF, AB বাহুর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে। AF রেখাংশের মধ্যবিন্দু G নির্ণয় করি। AG রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle GAK$ আঁকি এবং G বিন্দু দিয়ে $GH \parallel AK$ টানি। D বিন্দু দিয়ে $KDH \parallel AG$ টানি এবং মনে করি, তা AK ও GH কে যথাক্রমে K ও H বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $AGHK$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: D, F যোগ করি। $AGHK$ একটি সামান্তরিক [অঙ্কন অনুসারে]

যেখানে, $\angle GAK = \angle x$। আবার, $\triangle DAF$ এর ক্ষেত্রফল $=$ চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল এবং সামান্তরিক ক্ষেত্র $AGHK$এর ক্ষেত্রফল $= \triangle DAF$ এর ক্ষেত্রফল।

অতএব, $AGHK$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

অনুশীলনী ১৫

১. ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; নিচের কোন ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়?

ক) 3 সে.মি., 4 সে.মি., 5 সে.মি. খ) 6 সে.মি., 8 সে.মি., 10 সে.মি.
গ) 5 সে.মি., 7 সে.মি., 9 সে.মি. ঘ) 5 সে.মি., 12 সে.মি., 13 সে.মি.

২. সমতলীয় জ্যামিতিতে

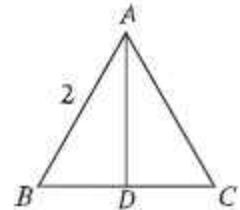
(i) প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে

(ii) দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম

(iii) দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে এদের ক্ষেত্রফল সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

পাশের চিত্রে, $\triangle ABC$ সমবাহু, $AD \perp BC$ এবং $AB = 2$

উপর্যুক্ত তথ্যের ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৩. $BD =$ কত?

ক) 1 খ) $\sqrt{2}$ গ) 2 ঘ) 4

৪. ত্রিভুজটির উচ্চতা কত?

ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ খ) $\sqrt{3}$ গ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ঘ) $2\sqrt{3}$

৫. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে কোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

৬. প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

৭. প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

৮. একটি সামান্তরিকক্ষেত্র এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিকক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

৯. $\triangle ABC$ এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y। প্রমাণ কর যে, $\triangle AXY$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল।

১০. $ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১১. সামান্তরিক $ABCD$ এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\triangle PAB$ এর ক্ষেত্রফল $+$ $\triangle PCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$(সামান্তরিক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল)।

১২. $\triangle ABC$ এ BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\triangle DBC = \triangle EBC$ এবং $\triangle DBE = \triangle CDE$।

১৩. ABC ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$।

১৪. ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর উপর যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$।

১৫. $\triangle ABC$ এর $\angle C$ স্থূলকোণ। AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD$।

১৬. $\triangle ABC$ এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ। AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$।

১৭. $\triangle PQR$ এ QD একটি মধ্যমা।

ক) উদ্দীপকের আলোকে আনুপাতিক চিত্র আঁক।

খ) প্রমাণ কর, $PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$।

গ) যদি $PQ = QR = PR$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর, $4QD^2 = 3PQ^2$।

১৮. $ABCD$ সামান্তরিকের $AB = 5$ সে.মি., $AD = 4$ সে.মি. এবং $\angle BAD = 75^\circ$। অপর একটি সামান্তরিক $APML$ এর $\angle LAP = 60^\circ$। $\triangle AED$ এর ক্ষেত্রফল ও $APML$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, $ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

ক) পেন্সিল, কম্পাস ও স্কেল ব্যবহার করে $\angle BAD$ আঁক।

খ) $\triangle AED$ অঙ্কন কর। [অঙ্কন চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]।

গ) $APML$ সামান্তরিকটি অঙ্কন কর। [অঙ্কন চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]।

অধ্যায় ১৬

পরিমিতি (Mensuration)

ব্যাবহারিক প্রয়োজনে রেখার দৈর্ঘ্য, তলের ক্ষেত্রফল, ঘনবস্তুর আয়তন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়। এ রকম যেকোনো রাশি পরিমাপের ক্ষেত্রে একই জাতীয় নির্দিষ্ট পরিমাণের একটি রাশিকে একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। পরিমাপকৃত রাশি এবং এরূপ নির্ধারিত এককের অনুপাতই রাশিটির পরিমাপ নির্ধারণ করে।

অর্থাৎ পরিমাপ $= \dfrac{\text{পরিমাপকৃত রাশি}}{\text{একক রাশি}}$

নির্ধারিত একক সম্পর্কে প্রত্যেক পরিমাপ একটি সংখ্যা যা পরিমাপকৃত রাশিটির একক রাশির কতগুণ তা নির্দেশ করে। যেমন, বেঞ্চটি 5 মিটার লম্বা। এখানে মিটার একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য যাকে একক হিসেবে ধরা হয়েছে এবং যার তুলনায় বেঞ্চটি 5 গুণ লম্বা।

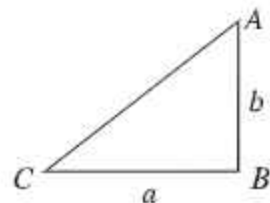
এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ত্রিভুজক্ষেত্র ও চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র প্রয়োগ করে বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় এবং এতদসম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- বৃত্তের পরিধি ও বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্তক্ষেত্র ও তার অংশবিশেষের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে এতদ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- আয়তাকার ঘনবস্তু, ঘনক ও বেলনের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে এবং এ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- সুষম ও যৌগিক ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।

ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

পূর্বের শ্রেণিতে আমরা জেনেছি, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

১. **সমকোণী ত্রিভুজ:** মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে $BC = a$ এবং $AB = b$। BC কে ভূমি এবং AB কে উচ্চতা বিবেচনা করলে,

$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2}ab$

২. **ত্রিভুজক্ষেত্রের দুই বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে:** মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয় $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$। A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব আঁকি। ধরি, উচ্চতা $AD = h$।

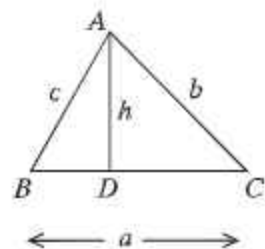
কোণ C বিবেচনা করলে পাই, $\frac{AD}{CA} = \sin C$

বা, $\frac{h}{b} = \sin C$ বা, $h = b\sin C$

$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} BC \times AD$

$= \frac{1}{2} a \times b\sin C = \frac{1}{2} ab\sin C$

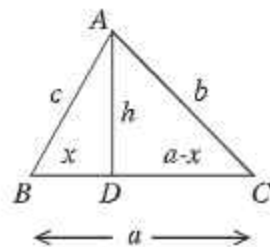
অনুরূপভাবে $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} bc\sin A = \frac{1}{2} ca\sin B$

৩. **ত্রিভুজের তিন বাহু দেওয়া আছে:**

মনে করি, $\triangle ABC$ এর $BC = a,\ CA = b$ এবং $AB = c$। এর পরিসীমা $2s = a + b + c$।

$AD \perp BC$ আঁকি।

ধরি, $BD = x$ তাহলে, $CD = a - x$

$\triangle ABD$ এবং $\triangle ACD$ সমকোণী।

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$ এবং $AD^2 = AC^2 - CD^2$

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$

বা, $c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$

বা, $c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

বা, $2ax = c^2 + a^2 - b^2$

$\therefore x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$

আবার,

$$
\begin{aligned}
AD^2 &= c^2 - x^2 \\
&= c^2 - \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2 \\
&= \left(c + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right) \\
&= \frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2a} \cdot \frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2a} \\
&= \frac{\{(c+a)^2-b^2\}\{b^2-(c-a)^2\}}{4a^2} \\
&= \frac{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}{4a^2} \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)}{4a^2} \\
&= \frac{2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)}{4a^2} \\
&= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}
\end{aligned}
$$

$\therefore AD = \dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\therefore \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}\cdot a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

৪. **সমবাহু ত্রিভুজ:** মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a

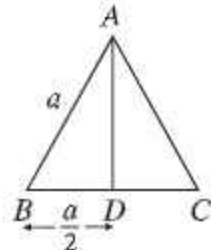
$AD \perp BC$ আঁকি। $\therefore BD = CD = \dfrac{a}{2}$

$\triangle ABD$ সমকোণী।

$\therefore BD^2 + AD^2 = AB^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$

$\therefore AD = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\cdot BC \cdot AD = \dfrac{1}{2}\cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

৫. **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ:** মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের

$AB = AC = a$ এবং $BC = b$

$AD \perp BC$ আঁকি। $\therefore BD = CD = \frac{b}{2}$

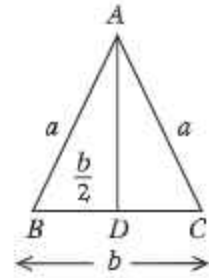
$\triangle ABD$ সমকোণী।

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$

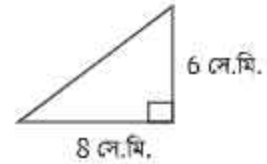
$= a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{4a^2 - b^2}{4}$

$\therefore AD = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$

সমদ্বিবাহু $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$

$= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

উদাহরণ ১. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 8 সে.মি. হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে $a = 6$ সে.মি. এবং $b = 8$ সে.মি.।

$\therefore$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 6 \times 8$ বর্গ সে.মি. $= 24$ বর্গ সে.মি.।

উদাহরণ ২. কোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথক্রমে 9 সে.মি. ও 10 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ত্রিভুজের বাহুদ্বয় যথাক্রমে $a = 9$ সে.মি. ও $b = 10$ সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta = 60^\circ$।

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab\sin 60^\circ$

$= \frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ বর্গ সে.মি. $= 38.97$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 38.97 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

উদাহরণ ৩. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে.মি., 8 সে.মি. ও 9 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ত্রিভুজটির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a = 7$ সে.মি., $b = 8$ সে.মি. ও $c = 9$ সে.মি.।

অর্ধপরিসীমা $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+9}{2}$ সে.মি. $= 12$ সে.মি.

9 সে.মি. 8 সে.মি. 7 সে.মি.

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{720} = 26.83$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

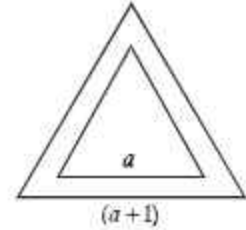
$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 26.83 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

উদাহরণ ৪. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল $3\sqrt{3}$ বর্গমিটার বেড়ে যায়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a মিটার।

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গমিটার।

ত্রিভুজটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার বাড়ালে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}(a+1)^2$ বর্গমিটার।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{\sqrt{3}}{4}(a+1)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 3\sqrt{3}$

বা, $(a+1)^2 - a^2 = 12$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\text{ দ্বারা ভাগ করে}\right]$

বা, $a^2 + 2a + 1 - a^2 = 12$ বা, $2a = 11$ বা, $a = 5.5$

নির্ণেয় বাহুর দৈর্ঘ্য 5.5 মিটার।

উদাহরণ ৫. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 60 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল 1200 বর্গ সে.মি. হলে সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি $b = 60$ সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য a।

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = 1200$

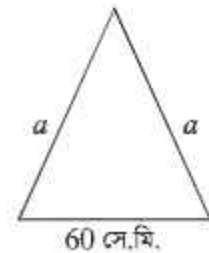
বা, $\frac{60}{4}\sqrt{4a^2 - (60)^2} = 1200$

বা, $15\sqrt{4a^2 - 3600} = 1200$

বা, $\sqrt{4a^2 - 3600} = 80$

বা, $4a^2 - 3600 = 6400$ [বর্গ করে]

বা, $4a^2 = 10000$

a a 60 সে.মি.

বা, $a^2 = 2500$

$\therefore a = 50$

ত্রিভুজটির সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 50 সে.মি.।

উদাহরণ ৬. একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা 120° কোণে চলে গেছে। দুই জন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার ও ৪ ঘণ্টায় কিলোমিটার বেগে বিপরীত দিকে রওনা হলো। 5 ঘণ্টা পরে তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

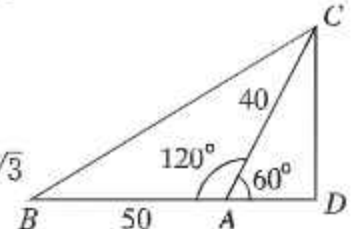
সমাধান: মনে করি, A স্থান থেকে দুইজন লোক যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় ৪ কিলোমিটার বেগে রওনা হয়ে 5 ঘণ্টা পর যথাক্রমে B ও C স্থাণে পৌঁছালো। তাহলে, 5 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব হবে BC। C থেকে BA এর বর্ধিতাংশের উপর CD লম্ব টানি।

$\therefore AB = 5 \times 10$ কিলোমিটার $= 50$ কিলোমিটার, $AC = 5 \times 8$ কিলোমিটার $= 40$ কিলোমিটার এবং $\angle BAC = 120^\circ$

$\therefore \angle DAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\triangle ACD$ সমকোণী।

$\therefore \frac{CD}{AC} = \sin 60^\circ$ বা, $CD = AC\sin 60^\circ = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

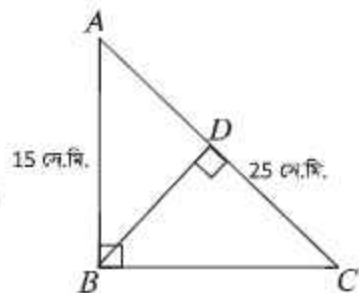
এবং $\frac{AD}{AC} = \cos 60^\circ$ বা, $AD = AC\cos 60^\circ = 40 \times \frac{1}{2} = 20$

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ BCD থেকে পাই,

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = (BA + AD)^2 + CD^2$$
$$= (50 + 20)^2 + (20\sqrt{3})^2 = 4900 + 1200 = 6100$$

$\therefore BC = 78.1$ (প্রায়)

নির্ণেয় দূরত্ব 78.1 কিলোমিটার (প্রায়)

উদাহরণ ৭. প্রদত্ত চিত্রের আলোকে

ক) BC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
খ) BD এর মান নির্ণয় কর।
গ) $\triangle ABD$ ও $\triangle BCD$ এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) $AB = 15,\ AC = 25$

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(25)^2 - (15)^2} = \sqrt{400} = 20$

খ) $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}BC \cdot AB = \frac{1}{2}AC \cdot BD$

$$\frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}BC \cdot AB$$

$$\therefore 25 \times BD = 20 \times 15$$

$$\therefore BD = 12$$

গ) $\triangle ABD$ সমকোণী থেকে পাই

$$AD^2 + BD^2 = AB^2$$

বা, $AD^2 + 12^2 = 15^2$

বা, $AD^2 = 225 - 144 = 81$

$\therefore AD = 9$ এবং $CD = AC - AD = 25 - 9 = 16$

অতএব, $\triangle ABD$ ও $\triangle BCD$ এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত,

$$\frac{\triangle ABD}{\triangle BCD} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AD}{\frac{1}{2}BD \cdot CD} = \frac{9}{16}$$

$$\triangle ABD : \triangle BCD = 9 : 16$$

অনুশীলনী ১৬.১

১. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 25 মিটার। এর অপর বাহুদ্বয়ের একটি বাহু অপরটির $\frac{3}{4}$ অংশ হলে, বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২. 20 মিটার লম্বা একটি মই দেওয়ালের সাথে খাড়াভাবে আছে। মইটির গোড়া দেওয়াল থেকে কত দূরে সরালে ওপরের প্রান্ত 4 মিটার নিচে নামবে।

৩. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 16 মিটার। এর সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য ভূমির $\frac{5}{6}$ অংশ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৪. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 25 সে.মি, 27 সে.মি. এবং পরিসীমা 84 সে.মি.। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার বাড়ালে এর ক্ষেত্রফল $6\sqrt{3}$ বর্গমিটার বেড়ে যয়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৬. একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 26 মিটার, 28 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 182 বর্গমিটার হলে, বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

৭. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 48 বর্গমিটার হলে, ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৮. একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা পরস্পর 135° কোণ করে দুই দিকে চলে গেছে। দুই জন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে বিপরীত মুখে রওনা হলো। 4 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

৯. একটি সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু থেকে তিনটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি., 7 সে.মি. ও 8 সে.মি.। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১০. একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ভূমির $\frac{11}{12}$ অংশ থেকে 6 সে.মি. কম এবং অতিভুজ ভূমির $\frac{4}{3}$ অংশ থেকে 3 সে.মি. কম।

ক) ভূমি x হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ) ত্রিভুজটির ভূমি 12 সে.মি. হলে এর পরিসীমার সমান পরিসীমাবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

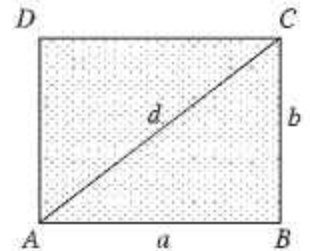
চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

১. **আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:** মনে করি, $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $AB = a$, প্রস্থ $BC = b$ এবং কর্ণ $AC = d$

আমরা জানি, আয়তক্ষেত্রের কর্ণ আয়তক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

আয়তক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2\times \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \frac{1}{2}a \cdot b = ab$

লক্ষ করি, আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা $s = 2(a+b)$ এবং ABC ত্রিভুজটি সমকোণী।

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$ বা, $d^2 = a^2 + b^2$

$\therefore d = \sqrt{a^2+b^2}$

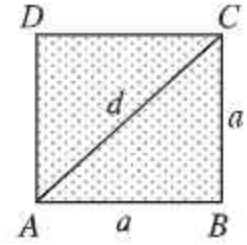
২. **বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:** মনে করি, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং কর্ণ d

AC কর্ণ বর্গক্ষেত্রক্ষত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \frac{1}{2} a \cdot a = a^2 =$ (বাহুর দৈর্ঘ্য)^2

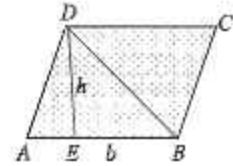
লক্ষ করি, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $s = 4a$ এবং

কর্ণ $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$

৩. **সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:**

ক) ভূমি ও উচ্চতা দেওয়া আছে:

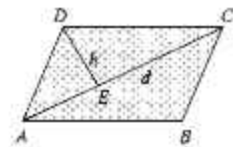
মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকক্ষেত্রের ভূমি $AB = b$ এবং উচ্চতা $DE = h$ । BD কর্ণ সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{1}{2} b \cdot h = bh$

খ) একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং ঐ কর্ণের বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে উক্ত কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে:

মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণ $AC = d$ এবং এর বিপরীত কৌণিক বিন্দু D থেকে AC এর উপর অঙ্কিত লম্ব $DE = h$। কর্ণ AC সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

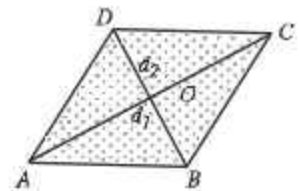
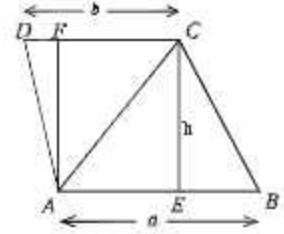
$\therefore$ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \triangle ACD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{1}{2} d \cdot h = dh$

৪. **রম্বসের ক্ষেত্রফল:** রম্বসের দুইটি কর্ণ দেওয়া আছে। মনে করি, $ABCD$ রম্বসের কর্ণ $AC = d_1$, কর্ণ $BD = d_2$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

কর্ণ AC রম্বসক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে। আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে

$\therefore \triangle ACD$ এর উচ্চতা $= \frac{d_2}{2}$

$\therefore$ রম্বস $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \triangle ACD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{1}{2} d_1 \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{1}{2} d_1 d_2$

৫. **ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:** ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের সমান্তরাল দুইটি বাহু এবং এদের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব দেওয়া আছে। মনে করি, $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $AB = a$ একক, $CD = b$ একক এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $CE = AF = h$। কর্ণ AC ট্রাপিজিয়াম $ABCD$ ক্ষেত্রটিকে $\triangle ABC$ ও $\triangle ACD$ ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

ট্রাপিজিয়াম $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $+ \triangle ACD$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}AB \times CE + \frac{1}{2}CD \times AF$

$= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{h(a+b)}{2}$

উদাহরণ ৮. একটি আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের $\frac{3}{2}$ গুণ। এর ক্ষেত্রফল 384 বর্গমিটার হলে, পরিসীমা ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তাকার ঘরের প্রস্থ x মিটার।

$\therefore$ ঘরের দৈর্ঘ্য $\frac{3}{2}x$ এবং ক্ষেত্রফল $\frac{3}{2}x \times x = \frac{3}{2}x^2$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{3}{2}x^2 = 384$ বা, $3x^2 = 768$ বা, $x^2 = 256$

$\therefore x = 16$ মিটার।

আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য $= \frac{3}{2} \times 16 = 24$ মিটার এবং প্রস্থ $= 16$ মিটার।

$\therefore$ ঘরটির পরিসীমা $= 2(24+16)$ মিটার $= 80$ মিটার এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{24^2 + 16^2}$ মিটার $= \sqrt{832}$ মিটার $= 28.84$ মিটার (প্রায়)

নির্ণেয় পরিসীমা 80 মিটার এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 28.84 মিটার (প্রায়)

উদাহরণ ৯. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2000 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 10 মিটার কম হতো তাহলে এটি একটি বর্গক্ষেত্র হতো। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার।

প্রশ্নানুসারে, $xy = 2000 \ldots (1)$ এবং $x - 10 = y \ldots (2)$

সমীকরণ (1) এ $y = x - 10$ বসিয়ে পাই

$x(x-10) = 2000$ বা, $x^2 - 10x - 2000 = 0$

বা, $x^2 - 50x + 40x - 2000 = 0$ বা, $(x-50)(x+40) = 0$

$\therefore x = 50$ অথবা $x = -40$

কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore x = 50$

এখন, সমীকরণ (2) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $y = 50 - 10 = 40$

আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 50 মিটার এবং প্রস্থ 40 মিটার।

উদাহরণ ১০. বর্গাকার একটি মাঠের ভিতরে চারদিকে 4 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। যদি রাস্তার ক্ষেত্রফল 1 হেক্টর হয়, তবে রাস্তা বাদে মাঠের ভিতরের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বর্গাকার মাঠের দৈর্ঘ্য x মিটার।

$\therefore$ এর ক্ষেত্রফল x^2 বর্গমিটার।
মাঠের ভিতরে চারদিকে 4 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে।
রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের দৈর্ঘ্য $= (x - 2 \times 4)$ বা, $(x - 8)$ মিটার।
রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল $= (x - 8)^2$ বর্গমিটার
সুতরাং রাস্তার ক্ষেত্রফল $= x^2 - (x - 8)^2$ বর্গমিটার
আমরা জানি, 1 হেক্টর = 10000 বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $x^2 - (x - 8)^2 = 10000$

বা, $x^2 - x^2 + 16x - 64 = 10000$

বা, $16x = 10064$

$\therefore x = 629$

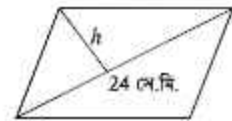
রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল

$= (629 - 8)^2$ বর্গমিটার $= 385641$ বর্গমিটার $= 38.56$ হেক্টর (প্রায়)

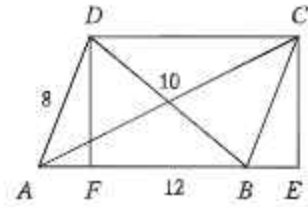
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 38.56$ হেক্টর (প্রায়)।

উদাহরণ ১১. একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 120 বর্গ সে.মি. এবং একটি কর্ণ 24 সে.মি.। কর্ণটির বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে উক্ত কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সামান্তরিকক্ষেত্রের একটি কর্ণ $d = 24$ সে. মি. এবং এর বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য h সে.মি.।

$\therefore$ সামান্তরিকক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= dh$ বর্গ সে.মি.
প্রশানুসারে, $dh = 120$ বা, $h = \dfrac{120}{d} = \dfrac{120}{24} = 5$
নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

উদাহরণ ১২. একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 12 মিটার ও 8 মিটার এবং ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 10 মিটার হলে, অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকের $AB = a = 12$ মিটার, $AD = c = 8$ মিটার এবং কর্ণ $BD = b = 10$ মিটার। D ও C থেকে AB এর উপর এবং AB এর বর্ধিতাংশের উপর DF ও CE লম্ব টানি। A, C ও B, D যোগ করি।

$\triangle ABD$ এর অর্ধপরিসীমা $s = \dfrac{12+10+8}{2}$ মিটার $= 15$ মিটার

$\therefore \triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{15(15-12)(15-10)(15-8)}$ বর্গমিটার $= \sqrt{15 \times 3 \times 5 \times 7}$ বর্গমিটার $= \sqrt{1575}$ বর্গমিটার $= 39.68$ বর্গমিটার (প্রায়)

আবার, $\triangle$ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} AB \times DF$

বা, $39.68 = \dfrac{1}{2} \times 12 \times DF$ বা, $6DF = 39.68$ $\therefore DF = 6.61$ (প্রায়)

এখন, $\triangle BCE$ সমকোণী।

$\therefore BE^2 = BC^2 - CE^2 = AD^2 - DF^2 = 8^2 - (6.61)^2 = 20.31$

$\therefore BE = 4.5$ (প্রায়)

অতএব, $AE = AB + BE = 12 + 4.5 = 16.5$ (প্রায়)

$\triangle ACE$ সমকোণী থেকে পাই

$\therefore AC^2 = AE^2 + CE^2 = (16.5)^2 + (6.61)^2 = 315.94$

$\therefore AC = 17.77$ (প্রায়)

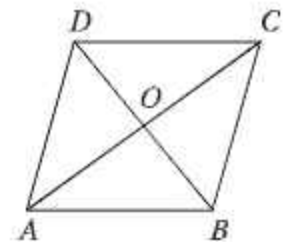
নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 17.77 মিটার (প্রায়)

উদাহরণ ১৩. একটি রম্বসের একটি কর্ণ 10 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 120 বর্গমিটার হলে, অপর কর্ণ এবং পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, $ABCD$ রম্বসের কর্ণ $BD = d_1 = 10$ মিটার এবং অপর কর্ণ d_2 মিটার।

রম্বসটির ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} d_1 d_2$ বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{1}{2} d_1 d_2 = 120$ বা, $d_2 = \dfrac{120 \times 2}{10} = 24$ মিটার।

আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore OD = OB = \dfrac{10}{2}$ মিটার $= 5$ মিটার এবং $OA = OC = \dfrac{24}{2}$ মিটার $= 12$ মিটার

$\triangle AOD$ সমকোণী ত্রিভুজে

$AD^2 = OA^2 + OD^2 = 12^2 + 5^2$

$\therefore AD = 13$

$\therefore$ রম্বসের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 13 মিটার।

রম্বসের পরিসীমা $= 4 \times 13$ মিটার $= 52$ মিটার

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 24 মিটার এবং পরিসীমা 52 মিটার।

উদাহরণ ১৪. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথক্রমে 91 সে.মি. ও 51 সে.মি. এবং অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 37 সে.মি. ও 13 সে.মি.। ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামের $AB = 91$ সে.মি. $CD = 51$ সে.মি. থেকে। D ও C থেকে AB এর উপর যথাক্রমে DE ও CF লম্ব টানি।

$\therefore\ CDEF$ একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore\ EF = CD = 51$ সে.মি.।

ধরি, $AE = x$ এবং $DE = CF = h$

$\therefore\ BF = AB - AF = 91 - (AE + EF) = 91 - (x + 51) = 40 - x$

সমকোণী $\triangle ADE$ থেকে পাই,

$AE^2 + DE^2 = AD^2$ বা, $x^2 + h^2 = 13^2$ বা, $x^2 + h^2 = 169 \ldots (1)$

আবার সমকোণী ত্রিভুজ BCF এর ক্ষেত্রে

$BF^2 + CF^2 = BC^2$ বা, $(40 - x)^2 + h^2 = 37^2$

বা, $1600 - 80x + x^2 + h^2 = 1369$

বা, $1600 - 80x + 169 = 1369$ $\quad$ [(1) এর সাহায্যে]

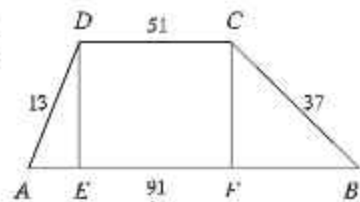
বা, $1600 + 169 - 1369 = 80x$

বা, $80x = 400\ \therefore\ x = 5$

সমীকরণ (1) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$5^2 + h^2 = 169$ বা, $h^2 = 169 - 25 = 144\ \therefore h = 12$

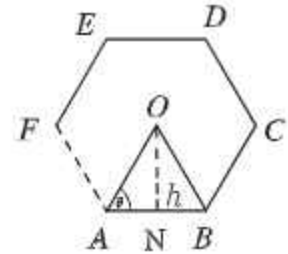
ট্রাপিজিয়াম $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$

$= \dfrac{1}{2}(91 + 51) \times 12$ বর্গ সে.মি. $= 71 \times 12$ বর্গ সে.মি. $= 852$ বর্গ সে.মি.

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 852 বর্গ সে.মি.।

সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল

সুষম বহুভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। আবার কোণগুলোও সমান। n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের কেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দুগুলো যোগ করলে n সংখ্যক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

সুতরাং বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= n \times$ একটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$ABCDEF\cdots$ একটি সুষম বহুভুজ, যার কেন্দ্র O, বাহু n সংখ্যক এবং প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a। $O,\ A;\ O,\ B$ যোগ করি।
ধরি $\triangle AOB$ এর উচ্চতা $ON = h$ এবং $\angle OAB = \theta$
সুষম বহুভুজের প্রতিটি শীর্ষে উৎপন্ন কোণের পরিমান $= 2\theta$
$\therefore$ সুষম বহুভুজের n সংখ্যক শীর্ষ কোণের সমষ্টি $= 2\theta n$

সুষম বহুভুজের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ $= 4$ সমকোণ

$\therefore$ কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ ও n শীর্ষ কোণের সমষ্টি $(2\theta n + 4)$ সমকোণ।

$\triangle OAB$ এর তিন কোণের সমষ্টি $= 2$ সমকোণ

$\therefore$ এরূপ n সংখ্যক ত্রিভুজের কোণগুলোর সমষ্টি $2n$ সমকোণ

$\therefore 2\theta \cdot n + 4$ সমকোণ $= 2n$ সমকোণ

বা, $2\theta \cdot n = (2n - 4)$ সমকোণ

বা, $\theta = \dfrac{2n-4}{2n}$ সমকোণ

বা, $\theta = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right) \times 90^\circ$

$$\therefore \theta = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$

এখানে, $\tan\theta = \dfrac{ON}{AN} = \dfrac{h}{a/2} = \dfrac{2h}{a}$

$$\therefore h = \frac{a}{2}\tan\theta$$

$$\triangle OAB \text{ এর ক্ষেত্রফল } = \frac{1}{2}ah$$
$$= \frac{1}{2}a \times \frac{a}{2}\tan\theta$$
$$= \frac{a^2}{4}\tan\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right)$$
$$= \frac{a^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n} \quad [\because \tan(90^\circ - A) = \cot A]$$

n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{na^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n}$

উদাহরণ ১৫. একটি সুষম পঞ্চভুজের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সুষম পঞ্চভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4$ সে.মি.। বাহুর সংখ্যা $n = 5$

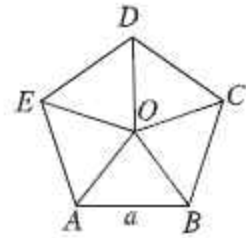
আমরা জানি, সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{na^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n}$

$\therefore$ সুষম পঞ্চভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{5 \times 4^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{5}$ বর্গ সে.মি.

$= 20 \times \cot 36^\circ$ বর্গ সে.মি.

$= 20 \times 1.376$ বর্গ সে.মি. (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

$= 27.528$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 27.528 বর্গ সে. মি. (প্রায়)

উদাহরণ ১৬. একটি সুষম ষড়ভুজের কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব 4 মিটার হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $ABCDEF$ একটি সুষম ষড়ভুজ। এর কেন্দ্র O থেকে শীর্ষবিন্দুগুলো যোগ করা হলো। ফলে 6টি সমান ক্ষেত্রবিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

$\therefore \angle COD = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

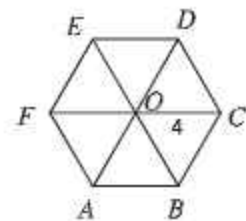
মনে করি কেন্দ্র থেকে শীর্ষবিন্দুগুলোর দূরত্ব a মিটার।

$\therefore \triangle COD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \sin 60^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2$ বর্গমিটার $= 4\sqrt{3}$ বর্গমিটার

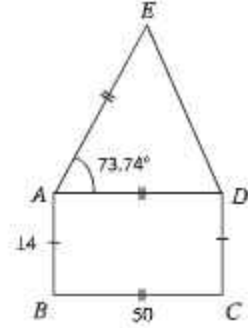
সুষম ষড়ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 6 \times \triangle COD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 6 \times 4\sqrt{3}$ বর্গমিটার $= 24\sqrt{3}$ বর্গমিটার

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $24\sqrt{3}$ বর্গমিটার

উদাহরণ ১৭. প্রদত্ত চিত্রের আলোকে

ক) আয়তক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ) ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল পূর্ণসংখ্যায় নির্ণয় কর।

গ) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের গ্রহণযোগ্য পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) চিত্র অনুসারে, ক্ষেত্রটি $ABCD$ আয়তক্ষেত্র এবং ADE সমদ্বিবাহু ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত।

$ABCD$ আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{50^2 + 14^2}$ সে.মি. $= 51.92$ সে.মি. (প্রায়)

খ) আয়তক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 50 \times 14$ বর্গ সে.মি. $= 700$ বর্গ সে.মি.

ত্রিভুজক্ষেত্র ADE এর ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}AD \cdot AE \cdot \sin\angle DAE = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times \sin 73.74^\circ$ বর্গ সে.মি. $= 24 \times 50 \times 0.960001$ বর্গ সে.মি.$= 1200$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (700 + 1200)$ বর্গ সে.মি. $= 1900$ বর্গ সে.মি.

গ) $\triangle ADE$ এ $AD = AE = 50$ সে.মি. $= a$ (ধরি), $DE = b$ (ধরি)

$\therefore$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ADE এর ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = 1200$

$b\sqrt{4(50)^2 - b^2} = 4800$

বা, $b^2(10000 - b^2) = 23040000$ [বর্গ করে]

বা, $10000b^2 - b^4 = 23040000$

বা, $b^4 - 10000b^2 + 23040000 = 0$

বা, $b^4 - 6400b^2 - 3600b^2 + 2304000 = 0$

বা, $(b^2 - 6400)(b^2 - 3600) = 0$

$\therefore b^2 - 6400 = 0$ অথবা $b^2 - 3600 = 0$

বা, $b^2 = 6400$ অথবা $b^2 = 3600$

$\therefore b = 80$ অথবা $b = 60$

$b = 80$ হলে, $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE \cdot \sin\angle ADE = 1200$

বা, $\frac{1}{2} \times 50 \times 80 \times \sin\angle ADE = 1200$

বা, $\sin\angle ADE = 0.6$

$\therefore \angle ADE = 36.87°$ (প্রায়)

$\triangle ADE$ এর তিন কোণের সমষ্টি $= 73.74° + 36.87° + 36.87° = 147.48°$

কিন্তু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $= 180°$, সুতরাং $b \neq 80$

$b = 60$ হলে, $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE \cdot \sin\angle ADE = 1200$

বা, $\frac{1}{2} \times 50 \times 60 \times \sin\angle ADE = 1200$

বা, $\sin\angle ADE = 0.8$

$\therefore \angle ADE = 53.13°$ (প্রায়)

$\triangle ADE$ এর তিন কোণের সমষ্টি $= 73.74° + 53.13° + 53.13° = 180°$, সুতরাং $b = 60$

$\therefore$ ত্রিভুজটির পরিসীমা $(50 + 50 + 60)$ সে.মি. $= 160$ সে.মি.

অনুশীলনী ১৬.২

১. একটি আয়তাকারক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ। এর ক্ষেত্রফল 512 বর্গমিটার হলে, পরিসীমা নির্ণয় কর।

২. একটি জমির দৈর্ঘ্য 80 মিটার এবং প্রস্থ 60 মিটার। ঐ জমির মাঝে একটি পুকুর খনন করা হলো। যদি পুকুরের প্রত্যেক পাড়ের বিস্তার 4 মিটার হয়, তবে পুকুরের পাড়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৩. একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 40 মিটার এবং প্রস্থ 30 মিটার। বাগানের ভিতরে সমান পাড় বিশিষ্ট একটি পুকুর আছে। পুকুরের ক্ষেত্রফল বাগানের ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{2}$ অংশ হলে, পুকুরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৪. একটি বর্গাকার মাঠের বাইরে চারদিকে 5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল 500 বর্গমিটার হলে, মাঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫. একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ এবং ক্ষেত্রফল 768 বর্গমিটার। প্রতিটি 40 সে.মি. বর্গাকার পাথর দিয়ে বর্গক্ষেত্রটি বাঁধতে মোট কতটি পাথর লাগবে?

৬. একটি আয়তাকারক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 160 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 6 মিটার কম হয়, তবে ক্ষেত্রটি বর্গাকার হয়। আয়তাকারক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৭. একটি সামান্তরিকের ভূমি উচ্চতার $\frac{3}{4}$ অংশ এবং ক্ষেত্রফল 363 বর্গমিটার হলে, ক্ষেত্রটির ভূমি ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

৮. একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের সমান। সামান্তরিকের ভূমি 125 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার হলে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৯. একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 30 সে.মি. এবং 26 সে.মি.। এর ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 28 সে.মি. হলে অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১০. একটি রম্বসের পরিসীমা 180 সে.মি. এবং ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 54 সে.মি.। এর অপর কর্ণ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১১. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্যের অন্তর 8 সে.মি. এবং এদের লম্ব দূরত্ব 24 সে.মি.। যদি ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল 312 বর্গ সে.মি. হয় তবে বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১২. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 31 সে.মি. ও 11 সে.মি. এবং অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সে.মি. ও 12 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

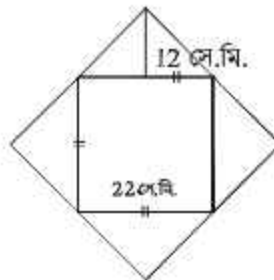
১৩. একটি সুষম অষ্টভুজের কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব 1.5 মিটার হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

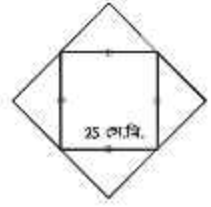
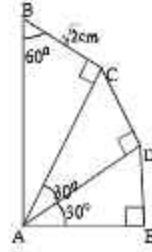
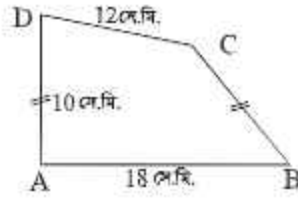
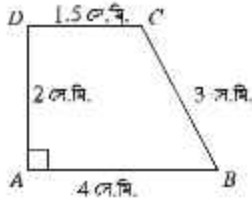
১৪. আয়তাকার একটি ফুলের বাগানের দৈর্ঘ্য 150 মিটার এবং প্রস্থ 100 মিটার। বাগানটিকে পরিচর্যা করার জন্য ঠিক মাঝ দিয়ে 3 মিটার চওড়া দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর রাস্তা আছে।

ক) উপরের তথ্যটি চিত্রের সাহায্যে সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

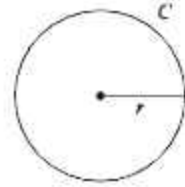
খ) রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) রাস্তাটি পাকা করতে 25 সে.মি. দৈর্ঘ্য এবং 12.5 সে.মি. প্রস্থবিশিষ্ট কয়টি ইটের প্রয়োজন হবে?

১৫. নিচের চিত্রের তথ্য থেকে বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৬. নিচের চিত্রের তথ্য থেকে বহুভুজসমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২০১৮

বৃত্ত সংক্রান্ত পরিমাপ

১. বৃত্তের পরিধি

বৃত্তের দৈর্ঘ্যকে তার পরিধি বলা হয়। কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে এর পরিধি $c = 2\pi r$, যেখানে $\pi = 3.14159265\cdots$ একটি অমূলদ সংখ্যা। π এর আসন্ন মান হিসেবে 3.1416 ব্যবহার করা যায়। সুতরাং কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ জানা থাকলে π এর আসন্ন মান ব্যবহার করে বৃত্তের পরিধির আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ১৮. একটি বৃত্তের ব্যাস 26 সে.মি. হলে, এর পরিধি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস $= 2r$ এবং পরিধি $= 2\pi r$

প্রশ্নানুসারে, $2r = 26$ বা, $r = \dfrac{26}{2}$ বা, $r = 13$ সে.মি.

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 13$ সে.মি.$= 81.68$ সে.মি.(প্রায়)

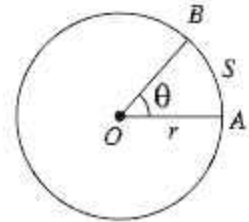
২. বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং $AB = s$ বৃত্তচাপ কেন্দ্রে θ° কোণ উৎপন্ন করে।

বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

বৃত্তের কেন্দ্রে মোট উৎপন্ন কোণ $= 360^\circ$ এবং চাপ s দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের ডিগ্রি পরিমাণ θ°

আমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

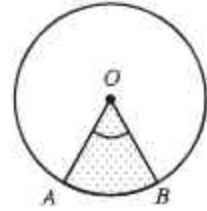
$\therefore \dfrac{\theta}{360^\circ} = \dfrac{s}{2\pi r}$ বা, $s = \dfrac{\pi r\theta}{180^\circ}$

৩. বৃত্তক্ষেত্র ও বৃত্তকলা ক্ষেত্রফল

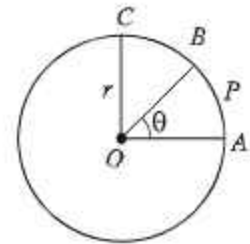
কোনো বৃত্ত দ্বারা বেষ্টিত এলাকাকে বৃত্তক্ষেত্র বলা হয় এবং বৃত্তটিকে এরূপ বৃত্তক্ষেত্রের সীমারেখা বলা হয়।

বৃত্তকলা: একটি চাপ ও চাপের প্রান্তবিন্দু সংশ্লিষ্ট ব্যাসার্ধ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে বৃত্তকলা বলা হয়।

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধির উপর A ও B দুইটি বিন্দু হলে, $\angle AOB$ এর অভ্যন্তরে OA ও OB ব্যাসার্ধ এবং AB চাপের সংযোগে গঠিত একটি বৃত্তকলা।

পূর্বের শ্রেণিতে আমরা শিখে এসেছি যে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

আমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

সুতরাং, এ পর্যায়ে আমরা স্বীকার করে নিতে পারি যে, একই বৃত্তের দুইটি বৃত্তাংশ ক্ষেত্র এবং এরা যে চাপ দুইটির উপর দণ্ডায়মান এদের পরিমাপ সমানুপাতিক।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r। AOB বৃত্তকলা ক্ষেত্রটি APB চাপের উপর দণ্ডায়মান, যার ডিগ্রি পরিমাপ θ। OA এর উপর OC লম্ব টানি।

$$\therefore \frac{\text{বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\angle AOB \text{ এর পরিমাপ}}{\angle AOC \text{ এর পরিমাপ}}$$

$$\text{বা, } \frac{\text{বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\theta}{90^\circ} \quad [\because \angle AOC = 90^\circ]$$

$$\text{বা, বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{90^\circ} \times \text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}$$

$$= \frac{\theta}{90^\circ} \times \frac{1}{4} \times \text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল}$$

$$= \frac{\theta}{90^\circ} \times \frac{1}{4} \times \pi r^2$$

$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$\text{সুতরাং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

উদাহরণ ১৯. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ ৪ সে.মি. এবং একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 56° কোণ উৎপন্ন করলে, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য এবং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r =$ ৪ সে.মি., বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 56^\circ$

আমরা জানি, $s = \frac{\pi r\theta}{180^\circ} = \frac{3.1416 \times 8 \times 56^\circ}{180^\circ}$ সে.মি.$= 7.82$ সে.মি.(প্রায়) এবং

বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{56}{360} \times 3.1416 \times 8^2$ বর্গ সে.মি.$= 31.28$ বর্গ সে.মি.(প্রায়)

উদাহরণ ২০. একটি বৃত্তের ব্যাস ও পরিধির পার্থক্য 90 সে.মি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস $= 2r$ এবং পরিধি $= 2\pi r$

প্রশ্নানুসারে, $2\pi r - 2r = 90$

বা, $2r(\pi - 1) = 90$

বা, $r = \frac{90}{2(\pi - 1)} = \frac{45}{3.1416 - 1} = 21.01$ সে.মি. (প্রায়)

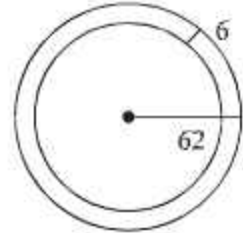
নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21.01 সে.মি. (প্রায়)

উদাহরণ ২১. একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাস 124 মিটার। মাঠের সীমানা ঘেঁষে 6 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ r এবং রাস্তাসহ বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ R.

$\therefore\ r = \frac{124}{2}$ মিটার $= 62$ মিটার এবং $R = (62 + 6)$ মিটার $= 68$ মিটার

বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ এবং রাস্তাসহ বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল $= \pi R^2$

$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ মাঠের ক্ষেত্রফল - মাঠের ক্ষেত্রফল
$= (\pi R^2 - \pi r^2) = \pi(R^2 - r^2)$
$= 3.1416(68^2 - 62^2) = 3.1416(4624 - 3844)$
$= 3.1416 \times 780 = 2450.44$ বর্গমিটার (প্রায়)
নির্ণেয় রাস্তার ক্ষেত্রফল 2450.44 বর্গমিটার (প্রায়)

কাজ: একটি বৃত্তের পরিধি 440 মিটার। ওই বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উদাহরণ ২২. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 12 সে.মি. এবং বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য 14 সে.মি.। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 12$ সে.মি., বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $s = 14$ সে.মি. এবং কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের ডিগ্রি পরিমাণ θ

আমরা জানি, $s = \frac{\pi r\theta}{180}$

বা, $\pi r\theta = 180 \times s$

বা, $\theta = \dfrac{180 \times s}{\pi r} = \dfrac{180 \times 14}{3.1416 \times 12} = 66.84^\circ$ (প্রায়)

নির্ণেয় কোণ 66.84° (প্রায়)

উদাহরণ ২৩. একটি চাকার ব্যাস 4.5 মিটার। চাকাটি 360 মিটার পথ অতিক্রম করতে কত বার ঘুরবে?

সমাধান: দেওয়া আছে, চাকার ব্যাস 4.5 মিটার।

$\therefore$ চাকাটির ব্যাসার্ধ $r = \dfrac{4.5}{2} = 2.25$ মিটার এবং পরিধি $= 2\pi r$

মনে করি, চাকাটি 360 মিটার পথ অতিক্রম করতে n বার ঘুরবে।

প্রশ্নানুসারে, $n \times 2\pi r = 360$

বা, $n = \dfrac{360}{2\pi r} = \dfrac{360}{2 \times 3.1416 \times 2.25} = 25.46$ (প্রায়)

$\therefore$ চাকাটি প্রায় 25 বার ঘুরবে।

উদাহরণ ২৪. 211 মিটার 20 সে.মি. যেতে দুইটি চাকা যথাক্রমে 32 এবং 48 বার ঘুরলো। চাকা দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তর নির্ণয় কর।

সমাধান: 211 মিটার 20 সে.মি. $=$ 21120 সে.মি.

মনে করি, চাকা দুইটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে R ও r যেখানে $R > r$

$\therefore$ চাকা দুইটির পরিধি যথাক্রমে $2\pi R$ ও $2\pi r$ এবং ব্যাসার্ধের অন্তর $(R - r)$

প্রশ্নানুসারে, $32 \times 2\pi R = 21120$

বা, $R = \dfrac{21120}{32 \times 2\pi} = \dfrac{21120}{32 \times 2 \times 3.1416} = 105.04$ সে.মি. (প্রায়)

এবং $48 \times 2\pi r = 21120$

বা, $r = \dfrac{21120}{48 \times 2\pi} = \dfrac{21120}{48 \times 2 \times 3.1416} = 70.03$ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore R - r = (105.04 - 70.03) = 35.01$ সে.মি. $= 0.35$ মি (প্রায়)

চাকা দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তর 0.35 মিটার (প্রায়)

উদাহরণ ২৫. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি.। একটি বর্গের ক্ষেত্রফল উক্ত বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান। বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 14$ সে.মি. এবং বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য a

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল πr^2 এবং বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= a^2$

প্রশ্নানুসারে, $a^2 = \pi r^2$

বা, $a = \sqrt{\pi}r = \sqrt{3.1416} \times 14 = 24.81$ (প্রায়)

নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 24.81 সে.মি. (প্রায়)

উদাহরণ ২৬. চিত্রে $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 22 মিটার এবং AED ক্ষেত্রটি একটি অর্ধবৃত্ত। সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রটির প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য a

সুতরাং, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$
আবার, AED একটি অধিবৃত্ত
$\therefore$ অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{22}{2}$ মিটার $= 11$ মিটার
সুতরাং, AED অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$\therefore$ সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $+$ AED অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= (a^2 + \frac{1}{2}\pi r^2)$

$= (22^2 + \frac{1}{2} \times 3.1416 \times 11^2) = 674.07$ বর্গমিটার (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 674.07 বর্গমিটার (প্রায়)

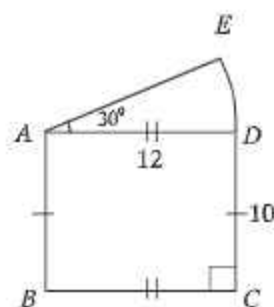
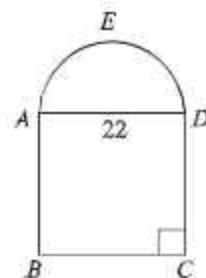
উদাহরণ ২৭. চিত্রে $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র যার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 12 মিটার ও 10 মিটার এবং DAE একটি বৃত্তাংশ। বৃত্তচাপ DE এর দৈর্ঘ্য এবং সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

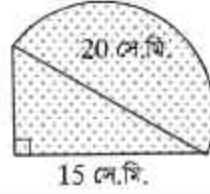
সমাধান: বৃত্তাংশের ব্যাসার্ধ $r = AD = 12$ মিটার এবং কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 30^\circ$

$\therefore$ বৃত্তচাপ DE এর দৈর্ঘ্য $= \frac{\pi r \theta}{180}$
$= \frac{3.1416 \times 12 \times 30}{180} = 6.28$ মিটার (প্রায়)
ADE বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$
$= \frac{30}{360} \times 3.1416 \times 12^2 = 37.7$ বর্গমিটার (প্রায়)

আয়তক্ষেত্র $ABCD$ এর দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 10 মিটার

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $= 12 \times 10 = 120$ বর্গমিটার

$\therefore$ সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (37.7 + 120)$ বর্গমিটার $= 157.7$ বর্গমিটার (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 157.7 বর্গমিটার (প্রায়)।

কাজ: চিত্রে গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ১৬.৩

১. একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস 126 সে.মি. হলে চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২. প্রতি মিনিটে 66 মিটার বেগে $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ঘোড়া একটি মাঠ ঘুরে এলো। ঐ মাঠের ব্যাস নির্ণয় কর।

৩. একটি বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 77 বর্গমিটার এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 মিটার। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।

৪. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি. এবং বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 75° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

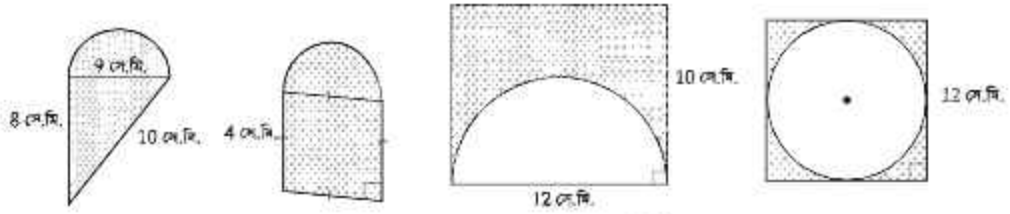
৫. একটি বৃত্তাকার মাঠকে ঘিরে একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ভিতরের পরিধি অপেক্ষা বাইরের পরিধি 44 মিটার বড়। রাস্তাটির প্রস্থ নির্ণয় কর।

৬. একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস 26 মিটার। পার্কটিকে বেষ্টন করে বাইরে 2 মিটার প্রশস্ত একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৭. একটি গাড়ির সামনের চাকার ব্যাস 28 সে.মি. এবং পিছনের চাকার ব্যাস 35 সে.মি.। 88 মিটার পথ যেতে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা কত পূর্ণসংখ্যক বার বেশি ঘুরবে?

৮. একটি বৃত্তের পরিধি 220 মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৯. একটি বৃত্তের পরিধি একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমার সমান। এদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

১০. নিচের চিত্রের তথ্য অনুযায়ী গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ঘনবস্তু (Solids)

আয়তাকার ঘনবস্তু (Rectangular solid)

তিন জোড়া সমান্তরাল আয়তাকার সমতল বা পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে আয়তাকার ঘনবস্তু বলে।

মনে করি, $ABCDEFGH$ একটি আয়তাকার ঘনবস্তু। এর দৈর্ঘ্য $AB = a$, প্রস্থ $BC = b$, উচ্চতা $AH = c$

১. কর্ণ নির্ণয়: $ABCDEFGH$ আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণ AF।

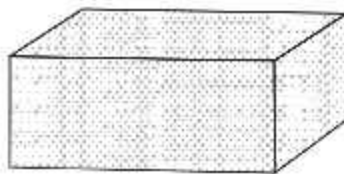
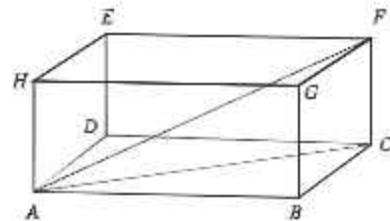
$\triangle ABC$ এ $BC \perp AB$ এবং AC অতিভুজ।

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$

আবার, $\triangle ABC$ এ $FC \perp AC$ এবং AF অতিভুজ।

$\therefore AF^2 = AC^2 + CF^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$\therefore AF = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$\therefore$ আয়তাকার ঘনবস্তুরটির কর্ণ $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

আয়তাকার ঘনবস্তু

২. সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়: আয়তাকার ঘনবস্তুটির ৬টি তল যেখানে, বিপরীত তলগুলো পরস্পর সমান।

আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল
$= 2(ABCD$ তলের ক্ষেত্রফল + $ABGH$ তলের ক্ষেত্রফল
+ $BCFG$ তলের ক্ষেত্রফল)
$= 2(AB \times AD + AB \times AH + BC \times BG)$
$= 2(ab + ac + bc) = 2(ab + bc + ca)$

৩. আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা $= abc$

উদাহরণ ২৮. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে, 25 সে.মি., 20 সে.মি. এবং 15 সে.মি.। এর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল, আয়তন এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য $a = 25$ সে.মি., প্রস্থ $b = 20$ সে.মি. এবং উচ্চতা $c = 15$ সে.মি.।

$\therefore$ আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab + bc + ca)$

$= 2(25 \times 20 + 20 \times 15 + 15 \times 25) = 2350$ বর্গ সে.মি.

এবং আয়তন $= abc = 25 \times 20 \times 15 = 7500$ ঘন সে.মি.

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$= \sqrt{25^2 + 20^2 + 15^2} = \sqrt{624 + 400 + 225} = \sqrt{1250} = 35.363$ সে.মি.(প্রায়)

নির্ণেয় সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল 2350 বর্গ সে.মি., আয়তন 7500 ঘন সে.মি. এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 35.363 সে.মি. (প্রায়)।

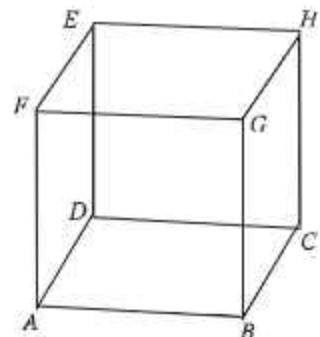
> **কাজ:** তোমার গণিত বইয়ের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা মেপে এর আয়তন, সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ঘনক (Cube)

আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হলে একে ঘনক বলা হয়।
মনে করি, $ABCDEFGH$ একটি ঘনক। এর দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = a একক

১. ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য
$= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$

২. ঘনকের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল
$= 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) = 2(a^2 + a^2 + a^2) = 6a^2$

৩. ঘনকটির আয়তন $= a \cdot a \cdot a = a^3$

ঘনক

উদাহরণ ২৯. একটি ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 96 বর্গমিটার। এর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ঘনকটির ধার a

$\therefore$ এর সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$

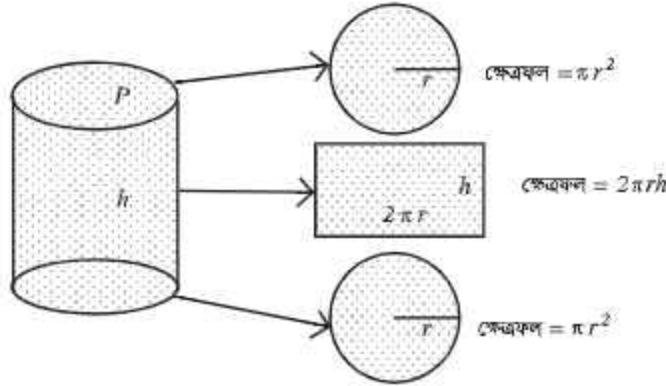
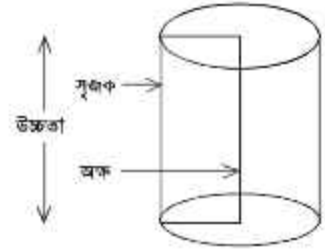
প্রশ্নানুসারে, $6a^2 = 96$ বা, $a^2 = 16 \therefore a = 4$

$\therefore$ ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \cdot 4 = 6.928$ মিটার (প্রায়)।

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 6.928 মিটার (প্রায়)।

> **কাজ:** তিনটি ধাতব ঘনকের ধার যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি. এবং 5 সে.মি.। ঘনক তিনটিকে গলিয়ে একটি নতুন ঘনক তৈরি করা হলো। নতুন ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

বেলন (Cylinder)

কোনো আয়তক্ষেত্রের যে কোনো বাহুকে অক্ষ ধরে আয়তক্ষেত্রটিকে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক বেলন বা সিলিন্ডার বলা হয়। সমবৃত্তভূমিক বেলনের দুই প্রান্তকে বৃত্তাকার তল, বক্রতলকে বক্রপৃষ্ঠ এবং সমগ্রতলকে পৃষ্ঠতল বলা হয়। আয়তক্ষেত্রের অক্ষের সমান্তরাল ঘূর্ণায়মান বাহুটিকে বেলনের সৃজক বা উৎপাদক রেখা বলে।

উপরের, চিত্রটি একটি সমবৃত্তভূমিক বেলন যার ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h

১. ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

২. বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি $\times$ উচ্চতা$= 2\pi rh$

৩. সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল বা সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল

বা, পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= (\pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2) = 2\pi r(r + h)$

৪. আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা$= \pi r^2 h$

উদাহরণ ৩০. একটি সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা 10 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সে.মি. হলে, এর আয়তন এবং সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা $h = 10$ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r

$\therefore$ এর আয়তন $= \pi r^2 h$

$= 3.1416 \times 7^2 \times 10 = 1539.38$ ঘন সে.মি.(প্রায়)

এবং সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r+h)$

$= 2 \times 3.1416 \times 7(7+10) = 747.7$ বর্গমিটার (প্রায়)

> **কাজ:** একটি আয়তাকার কাগজের পাতা মুড়িয়ে একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার তৈরি কর। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৩১. ঢাকনাসহ একটি বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি.। বাক্সটির ভিতরের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 262 বর্গ সে. মি. এবং বাক্সের পুরুত্ব সমান।

ক) বাক্সটির আয়তন নির্ণয় কর।

খ) বাক্সটির দেওয়ালের পুরুত্ব নির্ণয় কর।

গ) বাক্সটির বৃহত্তম দৈর্ঘ্যের সমান বাহুবিশিষ্ট কোনো রম্বসের একটি কর্ণ 16 সে.মি. হলে রম্বসটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) বাক্সটির বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি.

$\therefore$ বাক্সটির বাইরের আয়তন $= 10 \times 9 \times 7 = 630$ ঘন সে.মি.।

খ) মনে করি, বাক্সের পুরুত্ব x. ঢাকনাসহ বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি.

$\therefore$ বাক্সের ভিতরের মাপ যথাক্রমে $a = (10-2x)$ সে.মি., $b = (9-2x)$ সে.মি.

এবং $c = (7-2x)$ সে.মি.

বাক্সের ভিতরের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab+bc+ca)$

প্রশ্নানুসারে, $2(ab+bc+ca) = 262$

বা, $(10-2x)(9-2x)+(9-2x)(7-2x)+(7-2x)(10-2x) = 131$

বা, $90-38x+4x^2+63-32x+4x^2+70-34x+4x^2-131 = 0$

বা, $12x^2-104x+92 = 0$

বা, $3x^2-26x+23 = 0$

বা, $3x^2 - 3x - 23x + 23 = 0$

বা, $3x(x-1) - 23(x-1) = 0$

বা, $(x-1)(3x-23) = 0$

বা, $x - 1 = 0$ অথবা $3x - 23 = 0$

বা, $x = 1$ অথবা, $x = \frac{23}{3} = 7.67$ (প্রায়)

বাক্সটির পুরুত্ব তার বাইরের তিনটি পরিমাপের কোনোটির চেয়েই বড় হতে পারে না।

নির্ণেয় বাক্সের পুরুত্ব 1 সে.মি.

গ) মনে করি, $ABCD$ রম্বসের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সে.মি. এবং কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore OA = OC,\ OB = OD$

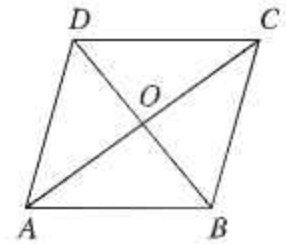
$\triangle AOB$ সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $AB = 10$

এখানে, $AB^2 = 10^2 = 100 = 36 + 64$

$= 6^2 + 8^2 = OB^2 + OA^2$ [চিত্র অনুযায়ী]

$\therefore\ OB = 6,\ OA = 8$

$\therefore$ কর্ণ $AC = 2 \times 8 = 16$ সে.মি. এবং কর্ণ $BD = 2 \times 6 = 12$ সে.মি.

$\therefore\ ABCD$ রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96$ বর্গ সে.মি.

উদাহরণ ৩২. কোনো ঘনকের পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $8\sqrt{2}$ সে.মি. হলে, এর কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ঘনকের ধার a

$\therefore$ ঘনকটির পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}a$, কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$ এবং আয়তন $= a^3$

প্রশ্নানুসারে, $\sqrt{2}a = 8\sqrt{2}$ বা, $a = 8$

$\therefore$ ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \times 8 = 13.856$ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন $= 8^3 = 512$ ঘন সে.মি.।

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 13.856 সে.মি. (প্রায়) এবং আয়তন 512 ঘন সে.মি.।

উদাহরণ ৩৩. কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে একটি সমবৃত্তভূমিক বেলন আকৃতির ঘনবস্তু উৎপন্ন হবে, যার উচ্চতা $h = 12$ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $r = 5$ সে.মি.।

উৎপন্ন ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r + h)$

$= 2 \times 3.1416 \times 5(5 + 12) = 534.071$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন $= \pi r^2 h$

$= 3.1416 \times 5^2 \times 12 = 942.48$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 534.071 বর্গ সে.মি. (প্রায়) এবং আয়তন 942.48 ঘন সে.মি. (প্রায়)

অনুশীলনী ১৬.৪

১. একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে.মি. এবং 5 সে.মি. হলে, এর পরিসীমার অর্ধেক কত সে.মি.?

ক) 12 খ) 20 গ) 24 ঘ) 28

২. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. হলে, এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক) $3\sqrt{3}$ খ) $4\sqrt{3}$ গ) $6\sqrt{3}$ ঘ) $9\sqrt{3}$

৩. সমতলীয় জ্যামিতিতে

(i) সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ছোট।

(ii) সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের সমষ্টি এক সমকোণ।

(iii) ত্রিভুজের যে কোনো বাহু বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ প্রত্যেকটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৪. বর্গক্ষেত্রে প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং কর্ণ d হলে

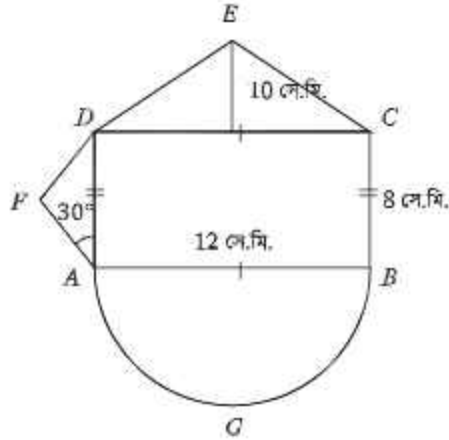
(i) ক্ষেত্রফল a^2 বর্গ একক

(ii) পরিসীমা $2ad$ একক

(iii) $d = \sqrt{2}a$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) *i* ও *ii* খ) *i* ও *iii* গ) *ii* ও *iii* ঘ) *i*, *ii* ও *iii*

চিত্রের তথ্য অনুসারে নিচের (৫ - ৭) প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

৫. $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক) 13 খ) 14 গ) 14.4 ঘ) 15

৬. ADF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক) 16 খ) 32 গ) 64 ঘ) 128

৭. AGB অর্ধবৃত্তের পরিধি কত সে.মি.?

ক) 18 খ) 18.85 (প্রায়) গ) 37.7 (প্রায়) ঘ) 96

৮. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 16 মিটার, প্রস্থ 12 মিটার ও উচ্চতা 4.5 মিটার। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

৯. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 21 : 16 : 12 এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 87 সে.মি. হলে, ঘনবস্তুটির তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১০. একটি আয়তাকার ঘনবস্তু 48 বর্গমিটার ভূমির উপর দণ্ডায়মান। এর উচ্চতা 3 মিটার এবং কর্ণ 13 মিটার। আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

১১. একটি আয়তাকার কাঠের বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 8 সে.মি., 6 সে.মি. ও 4 সে.মি.। এর ভিতরের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 88 বর্গ সে.মি.। বাক্সটির কাঠের পুরুত্ব নির্ণয় কর।

১২. একটি দেওয়ালের দৈর্ঘ্য 25 মিটার, উচ্চতা 6 মিটার এবং পুরুত্ব 30 সে.মি.। একটি ইটের দৈর্ঘ্য 10 সে.মি., প্রস্থ 5 সে.মি. এবং উচ্চতা 3 সে.মি.। দেওয়ালটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রয়োজনীয় ইটের সংখ্যা নির্ণয় কর।

১৩. একটি ঘনক আকৃতির বস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 2400 বর্গ সে.মি. হলে, এর কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

১৪. 12 সে.মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ 5 সে.মি.। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১৫. একটি বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি. এবং আয়তন 150 ঘন সে.মি.। বেলনের উচ্চতা এবং ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

১৬. একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 4400 বর্গ সে.মি.। এর উচ্চতা 30 সে.মি. হলে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৭. একটি লোহার পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাস যথাক্রমে 12 সে.মি. ও 14 সে.মি. এবং পাইপের উচ্চতা 5 মিটার। এক ঘন সে.মি. লোহার ওজন 7.2 গ্রাম হলে পাইপের লোহার ওজন নির্ণয় কর।

১৮. একটি আয়তাকারক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 5 মিটার। আয়তাকারক্ষেত্রটিকে পরিবেষ্টিত করে একটি বৃত্তাকারক্ষেত্র আছে যেখানে আয়তাকারক্ষেত্র দ্বারা অনধিকৃত অংশে ঘাস লাগানো হলো।

ক) উপরের তথ্যের ভিত্তিতে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র আঁক।

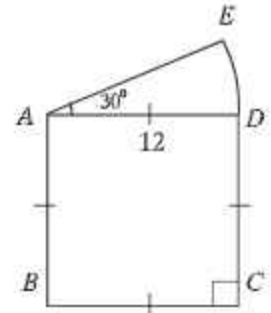
খ) বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস নির্ণয় কর।

গ) প্রতি বর্গমিটার ঘাস লাগাতে 50 টাকা খরচ হলে মোট খরচ নির্ণয় কর।

১৯. চিত্রটি বর্গক্ষেত্র ও বৃত্তকলায় বিভক্ত।

ক) বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা নির্ণয় কর।

খ) সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোনো সুষম ষড়ভুজ কোনো বৃত্তে অন্তর্লিখিত হলে বৃত্তের অনধিকৃত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২০. একটি সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এবং একটি আয়তক্ষেত্র $BCEF$ উভয়ের ভূমি BC.

ক) একই উচ্চতা বিবেচনা করে সামান্তরিক ও আয়তক্ষেত্রটির চিত্র আঁক।

খ) দেখাও যে, $ABCD$ ক্ষেত্রটির পরিসীমা $BCEF$ ক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

গ) আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 5 : 3 এবং ক্ষেত্রটির পরিসীমা 48 মিটার হলে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২১. একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ এবং ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার।

ক) x চলকের মাধ্যমে আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর।

খ) বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) আয়তাকারক্ষেত্রের বাইরে চতুর্দিকে 1.5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা তৈরি করতে 25×12.5 বর্গ সে.মি. তলবিশিষ্ট ইটের সংখ্যা নির্ণয় কর।

অধ্যায় ১৭

পরিসংখ্যান (Statistics)

বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির উন্নয়নের অগ্রযাত্রায় তথ্য ও উপাত্তের অবদানের ফলে পৃথিবী পরিণত হয়েছে বিশ্বগ্রামে। তথ্য ও উপাত্তের দ্রুত সঞ্চালন ও বিস্তারের জন্য সম্ভব হয়েছে বিশ্বায়নের। তাই উন্নয়নের ধারা অব্যাহত রাখা ও বিশ্বায়নে অংশগ্রহণ ও অবদান রাখতে হলে তথ্য ও উপাত্ত সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান অর্জন এ স্তরের শিক্ষার্থীদের জন্য অপরিহার্য। প্রাসঙ্গিকভাবে শিক্ষার্থীর জ্ঞান অর্জনের চাহিদা মেটানোর লক্ষ্যে দাখিল ৬ষ্ঠ শ্রেণি থেকে তথ্য ও উপাত্তের আলোচনা করা হয়েছে এবং ধাপে ধাপে শ্রেণিভিত্তিক বিষয়বস্তুর বিন্যাস করা হয়েছে। এরই ধারাবাহিকতায় এ শ্রেণিতে শিক্ষার্থীরা ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ, অজিভ রেখা, কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক ইত্যাদি সম্বন্ধে জানবে ও শিখবে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখার সাহায্যে উপাত্ত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির সাহায্যে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবে।
- গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা লেখচিত্রের ব্যাখ্যা করতে পারবে।

উপাত্তের উপস্থাপন (Presentation of Data): আমরা জানি, গুণবাচক নয় এমন সংখ্যাসূচক তথ্যাবলি পরিসংখ্যানের উপাত্ত। অনুসন্ধানাধীন উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো অবিন্যস্তভাবে থাকে এবং অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না। প্রয়োজন হয় উপাত্তগুলো বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করা। আর উপাত্তসমূহ কীভাবে সারণিভুক্ত করে বিন্যস্ত করতে হয় তা আমরা আগে শিখেছি। আমরা জানি, কোনো উপাত্ত সারণিভুক্ত করতে হলে প্রথমে তার পরিসর নির্ধারণ করতে হয়। এরপর শ্রেণি ব্যবধান ও শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণ করে ট্যালি চিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হয়। এখানে বুঝার সুবিধার্থে নিচের উদাহরণের মাধ্যমে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করার পদ্ধতি পুনরালোচনা করা হলো।

উদাহরণ ১. কোনো এক শীত মৌসুমে শ্রীমঙ্গালে জানুয়ারি মাসের 31 দিনের সর্বনিম্ন তাপমাত্রা ডিগ্রি সেলসিয়াসে নিচে দেওয়া হলো। সর্বনিম্ন তাপমাত্রার গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

$14^\circ, 14^\circ, 14^\circ, 13^\circ, 12^\circ, 13^\circ, 10^\circ, 10^\circ, 11^\circ, 12^\circ, 11^\circ, 10^\circ, 9^\circ, 8^\circ, 9^\circ, 11^\circ, 10^\circ, 10^\circ, 8^\circ, 9^\circ, 7^\circ, 6^\circ, 6^\circ, 6^\circ, 6^\circ, 7^\circ, 8^\circ, 9^\circ, 9^\circ, 8^\circ, 7^\circ$

সমাধান: এখানে তাপমাত্রা নির্দেশক উপাত্তের সবচেয়ে ছোট সংখ্যা 6 এবং বড় সংখ্যা 14।
সুতরাং উপাত্তের পরিসর $= (14 - 6) + 1 = 9$
এখন শ্রেণি ব্যবধান যদি 3 নেওয়া হয় তবে শ্রেণি সংখ্যা হবে $\frac{9}{3}$ বা 3।

শ্রেণি ব্যবধান 3 নিয়ে তিন শ্রেণিতে উপাত্তসমূহ বিন্যাস করলে গণসংখ্যা (ঘটন সংখ্যাও বলা হয়) নিবেশন সারণি হবে নিম্নরূপ:

তাপমাত্রা (সেলসিয়াস)	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা বা ঘটন সংখ্যা
$6^\circ - 8^\circ$	𝍸 𝍸 |	11
$9^\circ - 11^\circ$	𝍸 𝍸 |||	13
$12^\circ - 14^\circ$	𝍸 ||	7
	মোট	31

কাজ: তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত সকল শিক্ষার্থীর দুইটি দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজনের (কেজিতে) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

ক্রমযোজিত সংখ্যা (Cumulative Frequency): উদাহরণ ১ এর শ্রেণি ব্যবধান 3 ধরে শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণ করে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হয়েছে। উল্লেখিত উপাত্তের শ্রেণি সংখ্যা 3। প্রথম শ্রেণির সীমা হলো $6^\circ - 8^\circ$। এই শ্রেণির নিম্নসীমা 6° এবং উচ্চসীমা 8° সে. এবং গণসংখ্যা 11। একইভাবে দ্বিতীয় শ্রেণির সীমা $9^\circ - 11^\circ$ এবং গণসংখ্যা 13। এখন প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা 11 এর সাথে দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা 13 যোগ করে পাই 24। এই 24 হবে দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। আর প্রথম শ্রেণি দিয়ে শুরু হওয়ায় এই শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হবে 11। আবার দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা 24 এর সাথে তৃতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা যোগ করলে $24 + 7 = 31$, যা তৃতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। এইভাবে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হয়। উপরের আলোচনার প্রেক্ষিতে উদাহরণ ১ এর তাপমাত্রার ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি নিম্নরূপ:

তাপমাত্রা (সেলসিয়াস)	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$6^\circ - 8^\circ$	11	11
$9^\circ - 11^\circ$	13	$(11 + 13) = 24$
$12^\circ - 14^\circ$	7	$(24 + 7) = 31$

উদাহরণ ২. নিচে 40 জন শিক্ষার্থীর বার্ষিক পরীক্ষার ইংরেজীতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো (পূর্ণ নম্বর 100)। প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

70, 40, 35, 60, 55, 58, 45, 60, 65, 80, 70, 46, 50, 60, 65, 70, 58, 60, 48, 70, 36, 85, 60, 50, 46, 65, 55, 61, 72, 85, 90, 68, 65, 50, 40, 56, 60, 65, 46, 76

সমাধান: উপাত্তের পরিসর $=$ (সর্বোচ্চ মান $-$ সর্বনিম্ন মান) $+ 1$
$= (90 - 35) + 1 = 55 + 1 = 56$

শ্রেণি ব্যবধান যদি 5 ধরা হয়, তবে শ্রেণি সংখ্যা $= \dfrac{56}{5} = 11.2$ বা 12 [যদি দশমিক চলে আসে তবে পরবর্তী পূর্ণসংখ্যা নিতে হয়]

সুতরাং শ্রেণি ব্যবধান 5 ধরে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হবে নিম্নরূপ:

প্রাপ্ত নম্বর	টালি চিহ্ন	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$35 - 39$	||	2	2
$40 - 44$	||	2	$2 + 2 = 4$
$45 - 49$	𝍸	5	$5 + 4 = 9$
$50 - 54$	|||	3	$3 + 9 = 12$
$55 - 59$	𝍸	5	$5 + 12 = 17$
$60 - 64$	𝍸 ||	7	$7 + 17 = 24$
$65 - 69$	𝍸 |	6	$6 + 24 = 30$
$70 - 74$	𝍸	5	$5 + 30 = 35$
$75 - 79$	|	1	$1 + 35 = 36$
$80 - 84$	|	1	$1 + 36 = 37$
$85 - 89$	||	2	$2 + 37 = 39$
$90 - 94$	|	1	$1 + 39 = 40$

চলক (Variable): আমরা জানি সংখ্যাসূচক তথ্যসমূহ পরিসংখ্যানের উপাত্ত। উপাত্তে ব্যবহৃত সংখ্যাসমূহ চলকের মান নির্দেশ করে। যেমন, উদাহরণ ১ এ তাপমাত্রা ও উদাহরণ ২ এ প্রাপ্ত নম্বর চলক।

বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক (Discrete and Continuous Variable): পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত চলক দুই প্রকারের হয়। যেমন বিচ্ছিন্ন চলক ও অবিচ্ছিন্ন চলক। যে চলকের মান শুধুমাত্র পূর্ণসংখ্যা হয় তা বিচ্ছিন্ন চলক, যেমন উদাহরণ ২ এ ব্যবহৃত প্রাপ্ত নম্বর। তদনুরূপ জনসংখ্যা নির্দেশক উপাত্তে পূর্ণসংখ্যা ব্যবহৃত হয়। তাই জনসংখ্যামূলক উপাত্তের চলক হচ্ছে বিচ্ছিন্ন চলক। আর যে সকল চলকের মান যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, সে সকল চলক অবিচ্ছিন্ন চলক। যেমন উদাহরণ ১ এ তাপমাত্রা নির্দেশক উপাত্তে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। এ ছাড়া বয়স, উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি সংশ্লিষ্ট উপাত্তে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা ব্যবহার করা যায়। তাই এগুলোর জন্য ব্যবহৃত চলক হচ্ছে অবিচ্ছিন্ন চলক। অবিচ্ছিন্ন চলকের দুইটি মানের মধ্যবর্তী যেকোনো সংখ্যাও ঐ চলকের মান হতে পারে। অনেক সময় শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার প্রয়োজন হয়। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার জন্য কোনো শ্রেণির উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির নিম্নসীমার মধ্যবিন্দু নিয়ে সেই শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির প্রকৃত নিম্নসীমা নির্ধারণ করা হয়। যেমন, উদাহরণ ১ এ প্রথম শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে 4.5° ও 5.5° এবং দ্বিতীয় শ্রেণির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে 11.5° ও 4.5°, ইত্যাদি।

কাজ: তোমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের নিয়ে অনূর্ধ্ব ৪০ জনের দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজন/উচ্চতা নিয়ে দলে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

উপাত্তের লেখচিত্র (Graphs or Plots of Data): আমরা দেখেছি যে, অনুসন্ধানাধীন সংগৃহীত উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো গণসংখ্যা নিবেশন সারণিভুক্ত বা ক্রমযোজিত সারণিভুক্ত করা হলে এদের সম্বন্ধে সম্যক ধারণা করা ও সিদ্ধান্ত নেওয়া সহজ হয়। এই সারণিভুক্ত উপাত্তসমূহ যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বুঝানোর জন্য যেমন আরও সহজ হয় তেমনি চিত্তাকর্ষক হয়। এ জন্য পরিসংখ্যানের উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা ও লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন বহুল প্রচলিত এবং ব্যাপক ব্যবহৃত পদ্ধতি। ৮ম শ্রেণি পর্যন্ত বিভিন্ন প্রকার লেখচিত্রের মধ্যে রেখাচিত্র ও আয়তলেখ সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে এবং এগুলো কীভাবে আঁকতে হয় তা দেখানো হয়েছে। এখানে কীভাবে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা আঁকা হয় তা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

গণসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon): ৮ম শ্রেণিতে আমরা বিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ আঁকা শিখেছি। এখানে কীভাবে প্রথমে অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ এঁকে তার গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়, তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

উদাহরণ ৩. কোনো স্কুলের ১০ম শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের গণসংখ্যা নিবেশন হলো নিম্নরূপ:

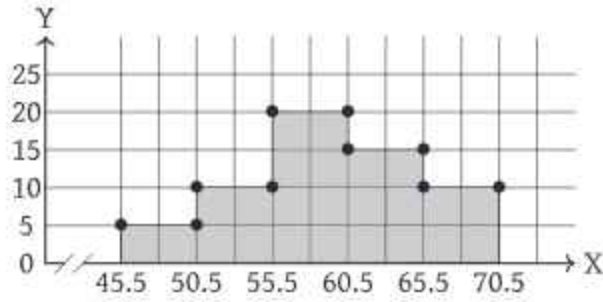
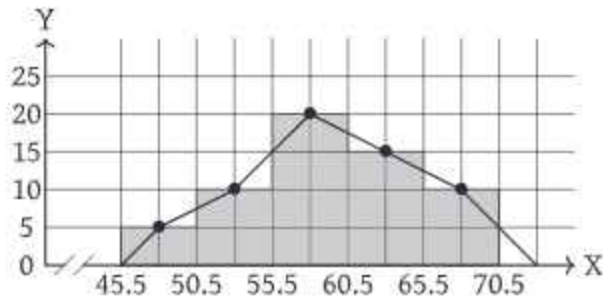
ওজন (কিলোগ্রাম)	$46-50$	$51-55$	$56-60$	$61-65$	$66-70$
গণসংখ্যা (শিক্ষার্থীর সংখ্যা)	5	10	20	15	10

ক) গণসংখ্যা নিবেশনের আয়তলেখ আঁক।

খ) আয়তলেখের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

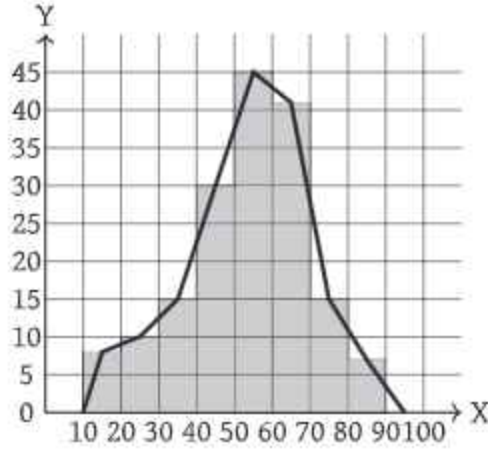
সমাধান: প্রদত্ত সারণিতে উপাত্তের শ্রেণি ব্যবধান বিচ্ছিন্ন। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন হলে সারণি হবে:

শ্রেণি ব্যবধান: ওজন (কিলোগ্রাম)	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিসীমা	শ্রেণি মধ্যবিন্দু	গণসংখ্যা
$46-50$	$45.5-50.5$	48	5
$51-55$	$50.5-55.5$	53	10
$56-60$	$55.5-60.5$	58	20
$61-65$	$60.5-65.5$	63	15
$66-70$	$65.5-70.5$	68	10

ক) ছক কাগজের প্রতি ঘরকে পাঁচ একক ধরে x-অক্ষ বরাবর শ্রেণিসীমা এবং y-অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা নিয়ে নিচে আয়তলেখ আঁকা হয়েছে। x-অক্ষ বরাবর শ্রেণিসীমা 45.5 থেকে আরম্ভ হয়েছে। মূলবিন্দু থেকে 45.5 পর্যন্ত পূর্ববর্তী ঘরগুলো আছে বোঝাতে —⁄⁄— ছেদ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

খ) আয়তলেখ হতে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকার জন্য আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহ নির্ধারণ করা হয়েছে। চিহ্নিত মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়েছে। গণসংখ্যা বহুভুজ সুন্দর দেখানোর জন্য প্রথম ও শেষ আয়তের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় শ্রেণি ব্যবধান নির্দেশক x-অক্ষের সাথে সংযুক্ত করা হয়েছে।

গণসংখ্যা বহুভুজ: কোনো অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের শ্রেণি ব্যবধানের বিপরীতে গণসংখ্যা নির্দেশক বিন্দুসমূহকে পর্যায়ক্রমে রেখাংশ দ্বারা যুক্ত করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায়, তাই হলো গণসংখ্যা বহুভুজ। লক্ষ কর এখানে রেখাংশগুলো প্রতিটি শ্রেণির মধ্যবিন্দু বরাবর।

উদাহরণ ৪. নিচের গণসংখ্যা নিবেশন সারণির বহুভুজ অঙ্কন কর।

শ্রেণি ব্যবধান	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90
মধ্যবিন্দু	15	25	35	45	55	65	75	85
গণসংখ্যা	8	10	15	30	45	41	15	7

সমাধান: x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে 10 একক ধরে এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে গণসংখ্যার 5 একক ধরে প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশনের আয়তলেখ আঁকা হলো। আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু যা শ্রেণির মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করি। এখন চিহ্নিত মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করি। প্রথম শ্রেণির প্রান্তবিন্দু ও শেষ শ্রেণির প্রান্তবিন্দুদ্বয়কে শ্রেণি ব্যবধান নির্দেশক x-অক্ষের সাথে সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হলো।

> **কাজ:** তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীদের প্রথম সাময়িক পরীক্ষায় বাংলায় প্রাপ্ত নম্বর নিয়ে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

উদাহরণ ৫. ১০ম শ্রেণির 50 জন শিক্ষার্থীর বিজ্ঞান বিষয়ের প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক (আয়তলেখ ব্যবহার না করে)।

শ্রেণি ব্যবধান	$31-40$	$41-50$	$51-60$	$61-70$	$71-80$	$81-90$	$91-100$
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

সমাধান: এখানে প্রদত্ত উপাত্ত বিচ্ছিন্ন। এক্ষেত্রে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দু বের করে সরাসরি গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা সুবিধাজনক। প্রথম শ্রেণি $(31-40)$ এর মধ্যবিন্দু $\frac{31+40}{2} = 35.5$।

শ্রেণি ব্যবধান	$31-40$	$41-50$	$51-60$	$61-70$	$71-80$	$81-90$	$91-100$
শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দু	35.5	45.5	55.5	65.5	75.5	85.5	95.5
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি এক ঘরকে এক একক ধরে এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ১ ঘরকে গণসংখ্যার ২ একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হলো।

কাজ: ১০০ জন কলেজ ছাত্রের উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

উচ্চতা (সে.মি.)	141 – 150	151 – 160	161 – 170	171 – 180	181 – 190
গণসংখ্যা	5	16	56	11	12

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখচিত্র বা অজিভ রেখা (Cumulative Frequency Graph or Ogive Graph): কোনো উপাত্তের শ্রেণি বিন্যাসের পর শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমা x-অক্ষ বরাবর এবং শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা y-অক্ষ বরাবর স্থাপন করে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার লেখচিত্র বা অজিভ রেখা পাওয়া যায়।

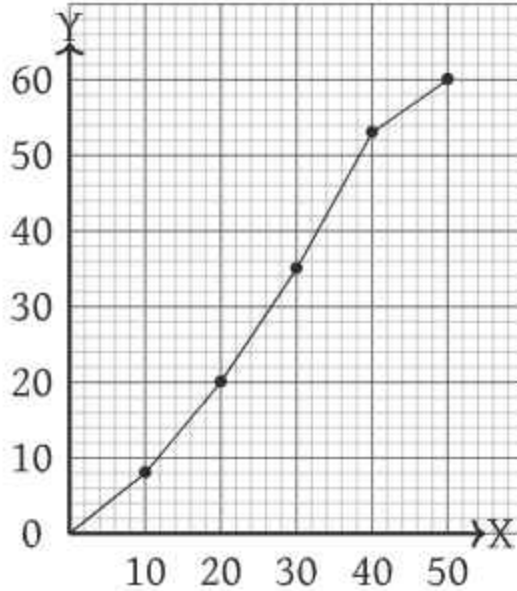
উদাহরণ ৬. কোনো শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ৫০ নম্বরের সাময়িকী পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো:

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50
গণসংখ্যা	8	12	15	18	7

এই গণসংখ্যা নিবেশনের অজিভ রেখা আঁক।

সমাধান: প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশনের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হলো:

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50
গণসংখ্যা	8	12	15	18	7
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	8	$8+12=20$	$15+20=35$	$18+35=53$	$7+53=60$

ছক কাগজের উভয় অক্ষে প্রতি এক ঘরকে দুই একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার অজিভ রেখা আঁকা হলো।

কাজ: কোনো এক পরীক্ষায় গণিতে তোমাদের শ্রেণির ৫০ বা তার চেয়ে বেশি নম্বরপ্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং অজিভ রেখা আঁক।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা (Central Tendency): ৭ম ও ৮ম শ্রেণিতে কেন্দ্রীয় প্রবণতা সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। অনুসন্ধানাধীন অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জীভূত হয়। আবার অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপন করা হলে মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যার প্রাচুর্য দেখা যায়। অর্থাৎ, মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যা খুব বেশি হয়। বস্তুত উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জীভূত হওয়ার এই প্রবণতাই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। কেন্দ্রীয় মান একটি সংখ্যা এবং এই সংখ্যা উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্ব করে। এই সংখ্যা দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। সাধারণত কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হলো: (১) গাণিতিক গড় (২) মধ্যক (৩) প্রচুরক।

গাণিতিক গড় (Arithmetic Average or Mean): আমরা জানি, উপাত্তসমূহের মানের সমষ্টিকে যদি তার সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে উপাত্তসমূহের গড় মান পাওয়া যায়। তবে উপাত্তসমূহের সংখ্যা যদি খুব বেশি হয় তাহলে এ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সময়সাপেক্ষ, বেশ কঠিন ও ভুল হওয়ার আশঙ্কা থাকে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তসমূহ শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ ৭. নিচে কোনো একটি শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94
গণসংখ্যা	5	10	15	20	30	16	4

সমাধান: এখানে শ্রেণি ব্যাপ্তি দেওয়া আছে বিধায় শিক্ষার্থীদের ব্যক্তিগত নম্বর কত তা জানা যায় না। এ ক্ষেত্রে প্রত্যেক শ্রেণির শ্রেণি মধ্যমান নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়।

$$\text{শ্রেণি মধ্যমান} = \frac{\text{শ্রেণির ঊর্ধ্বমান + শ্রেণির নিম্নমান}}{2}$$

যদি শ্রেণি মধ্যমান $x_i (i = 1 \ldots k)$ হয় তবে মধ্যমান সংবলিত সারণি হবে নিম্নরূপ:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$(f_i x_i)$
$25 - 34$	29.5	5	147.5
$35 - 44$	39.5	10	395
$45 - 54$	49.5	15	742.5
$55 - 64$	59.5	20	1190
$65 - 74$	69.5	30	2085
$75 - 84$	79.5	16	1275
$85 - 94$	89.5	4	358
	মোট	$n = 100$	6190.0

নির্ণেয় গাণিতিক গড়

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{100} \times 6190 = 61.9$$

শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় (সহজ পদ্ধতি): শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয়ের জন্য সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি হলো সহজ পদ্ধতি, যাতে গড় নির্ণয়ের ধাপসমূহ নিম্নরূপ:

১. শ্রেণিসমূহের মধ্যমান নির্ণয় করা

২. মধ্যমানসমূহ থেকে সুবিধাজনক কোনো মানকে আনুমানিক গড় (a) ধরা

৩. প্রত্যেক শ্রেণির মধ্যমান থেকে আনুমানিক গড় বিয়োগ করে একে শ্রেণি ব্যাপ্তি দ্বারা ভাগ করে

$$\text{ধাপ বিচ্যুতি } u = \frac{\text{মধ্যমান} - \text{আনুমানিক গড়}}{\text{ব্যাপ্তি}} \text{ নির্ণয় করা}$$

৪. ধাপ বিচ্যুতিকে সংশ্লিষ্ট শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা গুণ করা

৫. বিচ্যুতির গড় নির্ণয় করা এবং এর সাথে আনুমানিক গড় যোগ করে কাঙ্খিত গড় নির্ণয় করা।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি: শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড়

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i u_i}{n} \times h$$

যেখানে, $\bar{x}$ = নির্ণেয় গড়, a = আনুমানিক গড়, $f_i = i$-তম শ্রেণির গণসংখ্যা, $u_i f_i = i$-তম শ্রেণির গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি $h =$ শ্রেণি ব্যাপ্তি, $k =$ শ্রেণিসংখ্যা, $n =$ মোট গণসংখ্যা।

উদাহরণ ৮. কোনো দ্রব্যের উৎপাদনে বিভিন্ন পর্যায়ে যে খরচসমূহ (শত টাকায়) হয় তা নিচের সারণিতে দেখানো হয়েছে। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় খরচ নির্ণয় কর।

উৎপাদন খরচ	$2-6$	$6-10$	$10-14$	$14-18$	$18-22$	$22-26$	$26-30$	$30-34$
গণসংখ্যা	1	9	21	47	52	36	19	3

সমাধান: সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে অনুসৃত ধাপের আলোকে গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যমান x_i	গণসংখ্যা f_i	ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি f_iu_i
$2-6$	4	1	-4	-4
$6-10$	8	9	-3	-27
$10-14$	12	21	-2	-42
$14-18$	16	47	-1	-47
$18-22$	$20 \leftarrow a$	52	0	0
$22-26$	24	36	1	36
$26-30$	28	19	2	38
$30-34$	32	3	3	9
মোট		188		-37

গড় $\bar{x} = a + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_iu_i}{n} \times h = 20 + \dfrac{-37}{188} \times 4 = 20 - 0.79 = 19.21$

$\therefore$ উৎপাদনে আনুমানিক গড় খরচ 19 শত টাকা।

গুরুত্ব যুক্ত উপাত্তের গড় নির্ণয় (Determination of Weighted Average): অনেক ক্ষেত্রে অনুসন্ধানাধীন পরিসংখ্যানের চলকের সাংখ্যিক মান $x_1, x_2, \ldots, x_n$ বিভিন্ন কারণ/গুরুত্ব/ভার দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তের মান $x_1, x_2, \ldots, x_n$ এর সাথে এদের কারণ/গুরুত্ব/ভার $w_1, w_2, \ldots, w_n$ বিবেচনা করে গাণিতিক গড় নির্ণয় করতে হয়। যদি n সংখ্যক উপাত্তের মান $x_1, x_2, \ldots, x_n$ হয় এবং এদের গুরুত্ব $w_1, w_2, \ldots, w_n$ হয়, তবে এদের গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় হবে:

$$\overline{x_w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iw_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

উদাহরণ ৯. কোনো বিশ্ববিদ্যালয়ের কয়েকটি বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণিতে পাশের হার ও শিক্ষার্থীর সংখ্যা নিচের সারণিতে উপস্থাপন করা হলো। উক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ঐ কয়টি বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণিতে পাশের গড় হার নির্ণয় কর।

বিভাগের নাম	গণিত	পরিসংখ্যান	ইংরেজি	বাংলা	প্রাণিবিদ্যা	রাষ্ট্রবিজ্ঞান
পাশের হার (%)	70	80	50	90	60	85
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	80	120	100	225	135	300

সমাধান: এখানে পাশের হার ও শিক্ষার্থীর সংখ্যা দেওয়া আছে। পাশের হারের ভার হলো শিক্ষার্থীর সংখ্যা। যদি পাশের হারের চলক x এবং শিক্ষার্থীর সংখ্যা চলক w ধরা হয়, তবে গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ:

বিভাগের নাম	পাশের হার x_i	শিক্ষার্থীর সংখ্যা w_i	$x_i w_i$
গণিত	70	80	5600
পরিসংখ্যান	80	120	9600
ইংরেজি	50	100	5000
বাংলা	90	225	20250
প্রাণিবিদ্যা	60	135	8100
রাষ্ট্রবিজ্ঞান	85	300	25500
মোট		960	74050

$$\overline{x_w} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{6} w_i} = \frac{74050}{960} = 77.14$$

$\therefore$ পাশের গড় হার 77.14

কাজ: তোমাদের উপজেলার কয়েকটি স্কুলের এস.এস.সি পাশের হার ও তাদের সংখ্যা সংগ্রহ কর এবং পাশের গড় হার নির্ণয় কর।

মধ্যক (Median): ৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, পরিসংখ্যানের উপাত্তগুলো মানের ক্রমানুসারে সাজালে যেসকল উপাত্ত ঠিক মাঝখানে থাকে সেইগুলোর মানই হবে উপাত্তগুলোর মধ্যক। যদি উপাত্তের সংখ্যা n হয় এবং n যদি বিজোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n+1}{2}$তম পদের মান। আর n যদি জোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n}{2}$তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের গড়। এখানে সূত্র ব্যবহার না করে এবং ব্যবহার করে কীভাবে মধ্যক নির্ণয় করা হয় তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

উদাহরণ ১০. নিচের 51 জন শিক্ষার্থীর উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

উচ্চতা (সে.মি.)	150	155	160	165	170	175
গণসংখ্যা	4	6	12	16	8	5

সমাধান: মধ্যক নির্ণয়ের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি:

উচ্চতা (সে.মি.)	150	155	160	165	170	175
গণসংখ্যা	4	6	12	16	8	5
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	4	10	22	38	46	51

এখানে, $n = 51$, যা বিজোড় সংখ্যা

$\therefore$ মধ্যক $= \dfrac{51+1}{2}$ তম পদের মান $= 26$ তম পদের মান $= 165$

নির্ণেয় মধ্যক 165 সে.মি.।

লক্ষ করি: 23 থেকে 38 তম পদের মান 165।

উদাহরণ ১১. নিচে 60 জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি। মধ্যক নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত নম্বর	40	45	50	55	60	70	80	85	90	95	100
গণসংখ্যা	2	4	4	3	7	10	16	6	4	3	1

সমাধান: মধ্যক নির্ণয়ের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি:

প্রাপ্ত নম্বর	40	45	50	55	60	70	80	85	90	95	100
গণসংখ্যা	2	4	4	3	7	10	16	6	4	3	1
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	2	6	10	13	20	30	46	52	56	59	60

এখানে, $n = 60$, যা জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যক $= \dfrac{\frac{60}{2}\text{তম পদ } + (\frac{60}{2}+1)\text{তম পদ}}{2} = \dfrac{30\text{তম পদ} + 31\text{তম পদ}}{2} = \dfrac{70+80}{2} = 75$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক 75।

কাজ:

ক) তোমাদের শ্রেণির 49 জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সে.মি.) নিয়ে গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং কোনো সূত্র ব্যবহার না করে মধ্যক নির্ণয় কর।

খ) পূর্বের সমস্যা থেকে 9 জনের উচ্চতা বাদ দিয়ে 40 জনের উচ্চতার (সে.মি.) মধ্যক নির্ণয় কর।

শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয়: শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা n হলে, $\dfrac{n}{2}$ তম পদের মান হচ্ছে মধ্যক। আর $\dfrac{n}{2}$ তম পদের মান বা মধ্যক নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো মধ্যক $= L + \left(\dfrac{n}{2} - F_c\right) \times \dfrac{h}{f_m}$, যেখানে L হলো যে শ্রেণিতে মধ্যক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা, n গণসংখ্যা, F_c মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা, f_m মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h শ্রেণি ব্যাপ্তি।

উদাহরণ ১২. নিচে একটি গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া আছে।

সময় (সেকেন্ড)	$30-35$	$36-41$	$42-47$	$48-53$	$54-59$	$60-65$
গণসংখ্যা	3	10	18	25	8	6

ক) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি বলতে কী বুঝ?

খ) উপরের গণসংখ্যা সারণি থেকে মধ্যক নির্ণয় কর।

গ) তারপর সারণিতে প্রদত্ত উপাত্তের বহুভুজ অঙ্কন কর।

সমাধান:

ক) প্রদত্ত উপাত্তসমূহকে নির্দিষ্ট শ্রেণি ব্যবধান ও শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণের মাধ্যমে বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করাকে গণসংখ্যা সারণি বলে।

খ) মধ্যক নির্ণয়ের জন্য গণসংখ্যা নিবেশন সারণি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$30-35$	3	3
$36-41$	10	13
$42-47$	18	31
$48-53$	25	56
$54-59$	8	64
$60-65$	6	70
	$n=70$	

এখানে, $n = 70$ এবং $\frac{n}{2} = \frac{70}{2}$ বা 35।

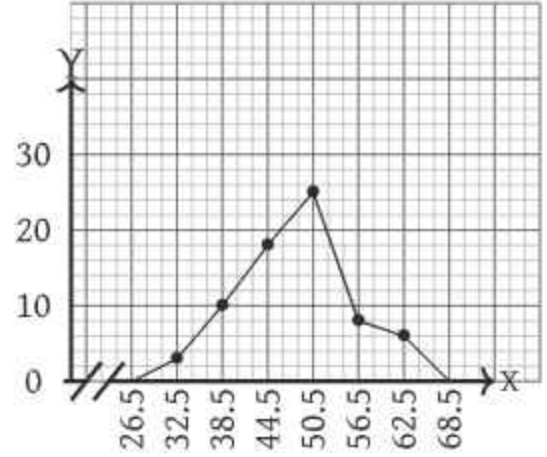
অতএব, মধ্যক 35 তম পদ যার অবস্থান $48-53$ শ্রেণিতে। অতএব মধ্যক শ্রেণি $48-53$।

সুতরাং $L = 48, F_c = 31, f_m = 25$ এবং $h = 6$।

কাজেই মধ্যক $= 48 + (35-31) \times \frac{6}{25} = 48 + 4 \times \frac{6}{25} = 48 + 0.96 = 48.96$

নির্ণেয় মধ্যক 48.96

গ) বহুভুজ অঙ্কনের জন্য সারণি: প্রথম শ্রেণির পূর্বের শ্রেণির মধ্যমান 26.5 এবং শেষ শ্রেণির পরের শ্রেণির মধ্যমান 68.5। এবার X অক্ষ বরাবর শ্রেণির মধ্যমান সুবিধাজনক এককে নিয়ে যেখানে —/⁄— (ছেদ) চিহ্নটি 0 থেকে 26.5 বুঝায় এবং y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা প্রতি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 2 ধরে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হলো।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	শ্রেণির মধ্যমান	গণসংখ্যা
$30 - 35$	32.5	3
$36 - 41$	38.5	10
$42 - 47$	44.5	18
$48 - 53$	50.5	25
$54 - 59$	56.5	8
$60 - 65$	62.5	6

কাজ: তোমাদের শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীকে নিয়ে ২টি দল গঠন কর। একটি সমস্যা সমাধানে প্রত্যেকের কত সময় লাগে (ক) তার গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর, (খ) সারণি হতে মধ্যক নির্ণয় কর।

প্রচুরক (Mode): ৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, কোনো উপাত্তে যে সংখ্যা সর্বাধিক বার উপস্থাপিত হয়, সেই সংখ্যাই উপাত্তের প্রচুরক। একটি উপাত্তের এক বা একাধিক প্রচুরক থাকতে পারে। কোনো উপাত্তে যদি কোনো সংখ্যাই একাধিকবার না থাকে তবে সেই উপাত্তে কোনো প্রচুরক নেই। এখানে সূত্র ব্যবহার করে কীভাবে শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় করতে হয় তাই আলোচনা করা হলো।

শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়: প্রচুরক $= L + \dfrac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$, যেখানে

L প্রচুরক শ্রেণির অর্থাৎ যে শ্রেণিতে প্রচুরক অবস্থিত তার নিম্নমান

$f_1 =$ প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা $-$ পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা

$f_2 =$ প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা $-$ পরবর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h হলো শ্রেণি ব্যাপ্তি

উদাহরণ ১৩. নিচের সারণিটি লক্ষ কর।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	$31 - 40$	$41 - 50$	$51 - 60$	$61 - 70$	$71 - 80$	$81 - 90$	$91 - 100$
গণসংখ্যা	4	6	8	12	9	7	4

ক) কেন্দ্রীয় প্রবণতা কী?

খ) প্রদত্ত সারণি থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর।

গ) উপাত্তের অজিভ রেখা অঙ্কন কর।

সমাধান:

ক) অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জীভূত হয়। আবার উপাত্তসমূহ গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপন করা হলে কোনো একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যার প্রাচুর্য দেখা যায়। উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জীভূত হওয়ার এই প্রবণতাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে।

খ) প্রচুরক নির্ণয়ের সারণি:

শ্রেণি	$31-40$	$41-50$	$51-60$	$61-70$	$71-80$	$81-90$	$91-100$
গণসংখ্যা	4	6	8	12	9	7	4

$$\text{প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1+f_2} \times h$$

এখানে, গণসংখ্যা সর্বাধিক 12 আছে $61-70$ শ্রেণিতে।

সুতরাং $L = 61, f_1 = 12-8 = 4, f_2 = 12-9 = 3, h = 10$

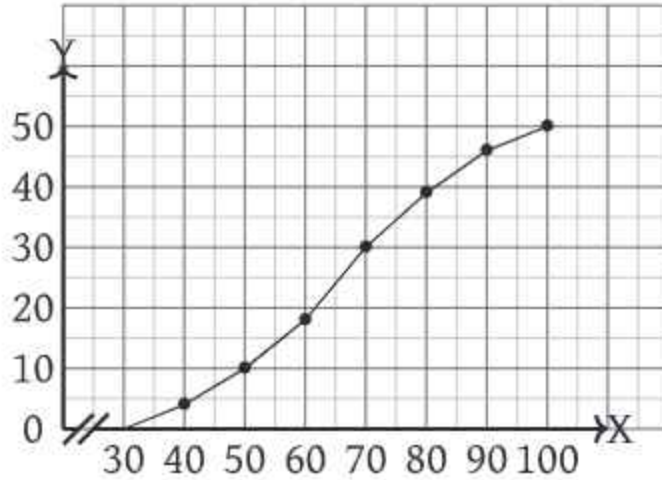
$$\therefore \text{প্রচুরক} = 61 + \frac{4}{4+3} \times 10 = 61 + \frac{4}{7} \times 10 = 61 + \frac{40}{7} = 61 + 5.7 = 66.7$$

নির্ণেয় প্রচুরক 66.7

গ) অজিভ রেখা অঙ্কনের জন্য সারণি:

শ্রেণি	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$31-40$	$30-40$	4	4
$41-50$	$40-50$	6	10
$51-60$	$50-60$	8	18
$61-70$	$60-70$	12	30
$71-80$	$70-80$	9	39
$81-90$	$80-90$	7	46
$91-100$	$90-100$	4	50

X অক্ষ বরাবর অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি ব্যাপ্তি সুবিধাজনক একক নিয়ে যেখানে —⁄⁄— (ছেদ) চিহ্নটি 0 থেকে 30 বুঝায় এবং y অক্ষ বরাবর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 5 একক ধরে শ্রেণির ঊর্ধ্বসীমা বরাবর বিন্দুগুলো চিহ্নিত করি। অতঃপর X অক্ষে 30 থেকে চিহ্নিত বিন্দুগুলো সাবলীলভাবে যোগ করি। এটিই নির্ণেয় অজিভ রেখা।

২০২৫

উদাহরণ ১৪. নিচের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর:

শ্রেণি	$41-50$	$51-60$	$61-70$	$71-80$
গণসংখ্যা	25	20	15	8

সমাধান: এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক 25 বার আছে $(41-50)$ শ্রেণিতে। সুতরাং, প্রচুরক এই শ্রেণিতে আছে।

আমরা জানি প্রচুরক $= L + \dfrac{f_1}{f_1+f_2} \times h$। এখানে, $L = 41$, $f_1 = 25-0 = 25$, $f_2 = 25-20 = 5$ কারণ প্রথম শ্রেণিতে গণসংখ্যা বেশি হলে, পুর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য।

$\therefore$ প্রচুরক $= 41 + \dfrac{25}{25+5} \times 10 = 41 + \dfrac{25}{30} \times 10 = 41 + 8.33 = 49.33$

নির্ণেয় প্রচুরক 49.33

উদাহরণ ১৫. নিচের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর:

শ্রেণি	$11-20$	$21-30$	$31-40$	$41-50$
গণসংখ্যা	4	16	20	25

সমাধান: এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক 25 বার আছে $(41-50)$ শ্রেণিতে। এই শ্রেণিতে প্রচুরক বিদ্যমান।

আমরা জানি প্রচুরক $= L + \dfrac{f_1}{f_1+f_2} \times h$

এখানে, $L = 41, f_1 = 25-20 = 5, f_2 = 25-0 = 25, h = 10$ কারণ শেষ শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, পরবর্তী শ্রেণির ঘটন সংখ্যা শূন্য ধরা হয়।

$\therefore$ প্রচুরক $= 41 + \dfrac{5}{25+5} \times 10 = 41 + \dfrac{5}{30} \times 10 = 41 + \dfrac{5}{3} = 41 + 1.67 = 42.67$

নির্ণেয় প্রচুরক 42.67 (প্রায়)।

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তে প্রথম শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, তার আগের শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য ধরতে হয়। শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তে শেষ শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, তার পরের শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য ধরতে হয়।

অনুশীলনী ১৭

১. উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা হলে প্রতি শ্রেণিতে যতগুলো উপাত্ত অন্তর্ভুক্ত হয় তার নির্দেশক নিচের কোনটি?

ক) শ্রেণি সীমা খ) শ্রেণির মধ্যবিন্দু গ) শ্রেণি সংখ্যা ঘ) শ্রেণির গণসংখ্যা

২. পরিসংখ্যানের অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জীভূত হয়। উপাত্তের এই প্রবণতাকে বলা হয়

ক) প্রচুরক খ) কেন্দ্রীয় প্রবণতা গ) গড় ঘ) মধ্যক

৩. নিচের সারণিতে

তাপমাত্রা	$6^\circ - 8^\circ$	$8^\circ - 10^\circ$	$10^\circ - 12^\circ$
গণসংখ্যা	5	9	4

(i) শ্রেণিব্যাপ্তি 3

(ii) মধ্যক শ্রেণি $8^\circ - 10^\circ$

(iii) তাপমাত্রা অবিচ্ছিন্ন চলক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) $i, ii,$ ও iii

৪. আয়তলেখ অঙ্কন করতে দরকার–

(i) x অক্ষ বরাবর অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিব্যাপ্তি

(ii) y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা

(iii) শ্রেণির মধ্যমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) $i, ii,$ ও iii

৫. উপাত্তের ক্ষেত্রে প্রচুরক -

(i) কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ

(ii) সবচেয়ে বেশি বার উপস্থাপিত মান

(iii) সবক্ষেত্রে অনন্য নাও হতে পারে

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) *i* ও *ii* খ) *i* ও *iii* গ) *ii* ও *iii* ঘ) *i*, *ii* ও *iii*

শীতকালে বাংলাদেশের কোনো একটি অঞ্চলের 10 দিনের তাপমাত্রার (সে.) পরিসংখ্যান হলো $10^\circ, 9^\circ, 8^\circ, 6^\circ, 11^\circ, 12^\circ, 7^\circ, 13^\circ, 14^\circ, 5^\circ$। এবার নিচের (৬-৮) প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

৬. উপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের প্রচুরক কোনটি?

ক) 12° খ) 5° গ) 14° ঘ) প্রচুরক নেই

৭. উপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের গড় তাপমাত্রা কোনটি?

ক) 8° খ) 8.5° গ) 9.5° ঘ) 9°

৮. উপাত্তসমূহের মধ্যক কোনটি?

ক) 9.5° খ) 9° গ) 8.5° ঘ) 8°

৯. সারণিভুক্ত শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হলো n, মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা L, মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা F_c, মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা F_m এবং শ্রেণিব্যাপ্তি h; এই তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি মধ্যক নির্ণয়ের সূত্র?

ক) $L+\left(\frac{n}{2}-F_c\right)\times\frac{h}{F_m}$ খ) $L+\left(\frac{n}{2}-F_m\right)\times\frac{h}{F_m}$

গ) $L-\left(\frac{n}{2}-F_c\right)\times\frac{h}{F_m}$ ঘ) $L-\left(\frac{n}{2}-F_m\right)\times\frac{h}{F_m}$

১০. ১০ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা আঁক।

শ্রেণিব্যাপ্তি	31 − 40	41 − 50	51 − 60	61 − 70	71 − 80	81 − 90	91 − 100
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

১১. নিচে ৫০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

ওজন (কেজি)	45	50	55	60	65	70
গণসংখ্যা	2	6	8	16	12	6

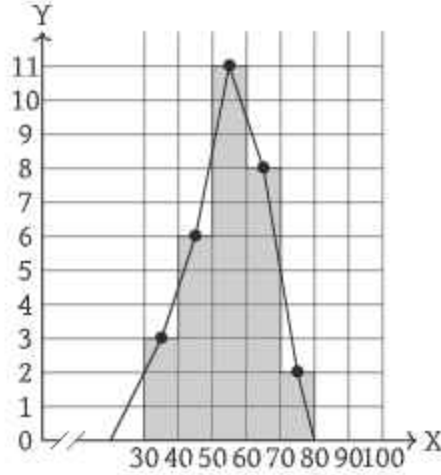
১২. কোনো বিদ্যালয়ের বার্ষিক পরীক্ষায় ৯ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরগুলো নিম্নরূপ:

76, 65, 98, 79, 64, 68, 56, 73, 83, 57, 55, 92, 45, 77, 87, 46, 32, 75, 89, 48
97, 88, 65, 73, 93, 58, 41, 69, 63, 39, 84, 56, 45, 73, 93, 62, 67, 69, 65, 53
78, 64, 85, 53, 73, 34, 75, 82, 67, 62

ক) প্রদত্ত তথ্যটির ধরন কীরূপ? কোনো নিবেশনে একটি শ্রেণির গণসংখ্যা কী নির্দেশ করে?

খ) উপযুক্ত শ্রেণিব্যাপ্তি নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

গ) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় কর।

১৩.

ক) উপরের চিত্রে, প্রথম শ্রেণিটির শ্রেণি মধ্যমান ও শেষ শ্রেণিটির গণসংখ্যা কত?

খ) চিত্রে প্রদর্শিত তথ্যটিকে ছকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ) উপরে প্রাপ্ত ছক থেকে নিবেশনটির মধ্যক নির্ণয় কর।

১৪. কোনো শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি নিম্নরূপ:

শ্রেণিব্যাপ্তি	45 – 49	50 – 54	55 – 59	60 – 64	65 – 69	70 – 74
গণসংখ্যা	4	8	10	20	12	6

ক) মধ্যক নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ।

খ) প্রদত্ত তথ্য থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর।

গ) উপাত্তের আয়তলেখ অঙ্কন কর।

১৫. তাপমাত্রা পরিবর্তনশীল। বাংলাদেশে সাধারণত জানুয়ারি মাসের ১ম সপ্তাহে তাপমাত্রা কম এবং জুন মাসের ৪র্থ সপ্তাহে তাপমাত্রা বেশি থাকে। ৫২ সপ্তাহের তাপমাত্রা ডিগ্রি সেলসিয়াস এককে নিম্নরূপ: 35, 30, 27, 42, 20, 19, 27, 36, 39, 14, 15, 38, 37, 40, 40, 12, 10, 9, 7, 20, 21, 24, 33, 30, 29, 21, 19, 31, 28, 26, 32, 30, 22, 23, 24, 41, 26, 23, 25, 22, 17, 19, 21, 23, 8, 13, 23, 24, 20, 32, 11, 17

ক) শ্রেণিব্যাপ্তি 5 ধরে শ্রেণি সংখ্যা নির্ণয় কর।

খ) প্রদত্ত উপাত্তসমূহকে সারণি আকারে প্রকাশ করে সারণি থেকে তাপমাত্রার গড় নির্ণয় কর।

গ) উপরে প্রাপ্ত সারণি ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কনের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয় কর।

অনুশীলনীর উত্তর

অনুশীলনী ১

১২. ক) $0.1\dot{6}$ খ) $0.\dot{6}\dot{3}$ গ) $3.\dot{2}$ ঘ) $3.5\dot{3}$

১৩. ক) $\frac{2}{9}$ খ) $\frac{35}{99}$ গ) $\frac{2}{15}$ ঘ) $3\frac{71}{90}$ ঙ) $6\frac{769}{3330}$

১৪. ক) $2.3\dot{3}\dot{3}$, $5.2\dot{3}\dot{5}$ খ) $7.2\dot{6}\dot{6}$, $4.2\dot{3}\dot{7}$
গ) $5.\dot{7}77777\dot{7}$, $8.\dot{3}4343\dot{4}$, $6.\dot{2}4524\dot{5}$ ঘ) $12.32\dot{0}\dot{0}$, $2.19\dot{9}\dot{9}$, $4.32\dot{5}\dot{6}$

১৫. ক) $0.58\dot{9}$ খ) $17.117\dot{9}$ গ) $1.0700\dot{9}37\dot{2}$

১৬. ক) $1.3\dot{1}$ খ) $1.6\dot{6}\dot{5}$ গ) $3.13\dot{3}\dot{4}$ ঘ) $6.11\dot{6}0\dot{2}$

১৭. ক) $0.\dot{2}$ খ) 2 গ) $0.\dot{2}07\dot{4}$ ঘ) $12.1\dot{8}\dot{5}$

১৮. ক) 0.5 খ) 0.2 গ) $5.\dot{2}195\dot{1}$ ঘ) $4.\dot{8}$

১৯. ক) 3.4641, 3.464 খ) 0.5025, 0.503
গ) 1.1590, 1.160 ঘ) 2.2650, 2.265

২০. ক) মূলদ খ) মূলদ গ) অমূলদ ঘ) অমূলদ
ঙ) অমূলদ চ) মূলদ ছ) মূলদ জ) মূলদ

২৩. ক) 9 খ) 5

অনুশীলনী ২.১

১. ক) $\{4, 5\}$ খ) $\{\cdots, -5, -4, -3, 3\}$ গ) $\{6, 12, 18, 36\}$ ঘ) $\{3, 4\}$

২. ক) $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 13\}$

খ) $\{x \in N : x, 36$ এর গুণনীয়ক$\}$

গ) $\{x \in N : x, 4$ এর গুণিতক এবং $x \leq 40\}$

ঘ) $\{x \in Z : x^2 \geq 16$ এবং $x^3 \leq 216\}$

৩. ক) $\{1\}$ খ) $\{1, 2, 3, 4, a\}$ গ) $\{2\}$
ঘ) $\{2, 3, 4, a\}$ ঙ) $\{2\}$

৫. $P(Q) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}. \{x, y\}\}$

$P(R) = \{\varnothing, \{m\}, \{n\}, \{l\}, \{m, n\}, \{m, l\}, \{n, l\}, \{m, n, l\}\}$

৭. ক) 2.3 খ) (c, a) গ) $(1, 5)$

৮. ক) $\{(a, b), (a, c)\}, \{(b, a), (c, a)\}$ খ) $\{(4, x), (4, y), (5, x), (5, y)\}$

গ) $\{(3, 3), (5, 3), (7, 3)\}$

৯. $\{1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45\}$ এবং $\{1, 5\}$

১০. $\{35. 105\}$

১১. 5 জন

অনুশীলনী ২.২

১০. $\{(3, 2),\ (4, 2)\}$

১১. $\{(2, 4),\ (2, 6)\}$

১২. $-7,\ 23,\ -\frac{7}{16}$

১৩. 2

১৪. 1 বা 2 বা 3

১৫. $\frac{2}{x^2}$

১৭. ক) $\{2\},\ \{1, 2, 3\}$

খ) $\{-2, -1, 0, 1, 2\},\ \{0, 1, 4\}$

গ) $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right\},\ \{-2, -1. 0, 1, 2\}$

১৮. ক) $\{(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)\}, \{-1, 0, 1, 2\}, \{-1, 0, 1, 2\}$

খ) $\{(0, 0), (1, 2)\},\ \{0, 1\},\ \{0, 2\}$

অনুশীলনী ৩.১

১. ক) $4a^2 + 12ab + 9b^2$ খ) $x^4 + \frac{4x^2}{y^2} + \frac{4}{y^4}$

গ) $16y^2 - 40xy + 25x^2$ ঘ) $25x^4 - 10x^2y + y^2$

ঙ) $9b^2 + 25c^2 + 4a^2 - 30bc + 20ca - 12ab$

চ) $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2abxy + 2bcyz - 2cazx$

ছ) $4a^2 + 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 12ax - 8ay - 20az - 12xy - 30xz + 20yz$

জ) 1014049

২. ক) $p^2 + 49q^2 - 14pq$ খ) $36n^2 - 24pn + 4p^2$
গ) 100 ঘ) 3104

৩. ± 16

৪. $\pm 3m$

৬. $\frac{1}{4}$

৯. 19

১০. 25

১১. 6

১২. 9

১৩. $(2a + b + c)^2 - (b - a - c)^2$

১৪. $(x + 5)^2 - 1^2$

১৫. ক) 3 খ) 1

অনুশীলনী ৩.২

১. ক) $8x^6 + 36x^4y^2 + 54x^2y^4 + 27y^6$ খ) $343m^6 - 294m^4n + 84m^2n^2 - 8n^3$
গ) $8a^3 - b^3 - 27c^3 - 12a^2b - 36a^2c + 6ab^2 + 54ac^2 - 9b^2c - 27bc^2 + 36abc$

২. ক) $8x^3$ খ) $8(b + c)^3$ গ) $64m^3n^3$
ঘ) $2(x^3 + y^3 + z^3)$ ঙ) $64x^3$

৩. 665

৪. 54

৫. 8

৬. 42880

৮. ক) 3 খ) 9

৯. ক) 133 খ) 665

১০. $a^3 - 3a$

১১. $p^3 + 3p$

১৬. $46\sqrt{5}$

অনুশীলনী ৩.৩

১. $b(x - y)(a - c)$

২. $(3x + 4)^2$

৩. $(a^2 + 5a - 1)(a^2 - 5a - 1)$

৪. $(x^2 + 2xy - y^2)(x^2 - 2xy - y^2)$

৫. $(ax + by + ay - bx)(ax + by - ay + bx)$

৬. $(2a - 3b + 2c)(2a - 3b - 2c)$

৭. $(a + y + 2)(a - y + 4)$

৮. $(4x - 5y)(4x + 5y - 2z)$

৯. $(x + 4)(x + 9)$

১০. $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 5)$

১১. $(a - 18)(a - 12)$

১২. $(a^4 - 2)(a^4 + 1)$

১৩. $(x + 13)(x - 50)$

১৪. $y^2(x + 1)(9x - 14)$

১৫. $(x + 3)(x - 3)(4x^2 + 9)$

১৬. $(x + a)(ax + 1)$

১৭. $(a^2 + 2a - 4)(3a^2 + 6a - 10)$

১৮. $(x+ay+y)(ax-x+y)$
১৯. $(x+2)(x^2+x+1)$
২০. $(a-3)(a^2-3a+3)$
২১. $(a-b)(2a^2+5ab+8b^2)$
২২. $(2x-3)(4x^2+12x+21)$
২৩. $\frac{1}{27}(6a+b)(36a^2-6ab+b^2)$
২৪. $\left(\frac{a^2}{3}-b^2\right)\left(\frac{a^4}{9}+\frac{a^2b^2}{3}+b^4\right)$
২৫. $\left(2a-\frac{1}{2a}\right)\left(2a-\frac{1}{2a}+2\right)$
২৬. $(a+4)(19a^2-13a+7)$
২৭. $(x^2+7x+4)(x^2+7x+18)$
২৮. $(x^2-8x+20)(x^2-8x+2)$
২৯. $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
৩০. $(2z-3x-5)(10x+7z+3)$

অনুশীলনী ৩.৪

১. $(a+1)(3a^2-3a+5)$
২. $(x+y)(x-3y)(x+2y)$
৩. $(x-2)(x+1)(x+3)$
৪. $(x-1)(x+2)(x+3)$
৫. $(a+3)(a^2-3a+12)$
৬. $(a-1)(a-1)(a^2+2a+3)$
৭. $(a+1)(a-4)(a+2)$
৮. $(x-2)(x^2-x+2)$
৯. $(a-b)(a^2-6ab+b^2)$
১০. $(x-3)(x^2+3x+8)$
১১. $(x+1)(x+2)(x+3)$
১২. $(x-2)(2x+1)(x^2+1)$
১৩. $(2x-1)(2x+1)(x+1)(x+2)$
১৪. $x(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
১৫. $(4x-1)(x^2-x+1)$
১৬. $(2x+1)(3x+2)(3x-1)$

অনুশীলনী ৩.৫

১৪. $\frac{2}{3}(p+r)$ দিনে
১৫. 5 ঘণ্টা
১৬. 6 দিনে
১৭. 100 জন
১৮. স্রোতের বেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ কি.মি. এবং নৌকার বেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$ কি.মি.
১৯. দাঁড়ের বেগ 8 কি.মি./ঘণ্টা এবং স্রোতের বেগ 2 কি.মি./ঘণ্টা
২০. $\frac{t_1t_2}{t_2-t_1}$ মিনিট
২১. 240 লিটার
২২. ক) 120 টাকা খ) 80 টাকা গ) 60 টাকা
২৩. 450 টাকা
২৪. 10 টাকা
২৫. 48 টাকা
২৬. 4%
২৭. 625 টাকা
২৮. 28%
২৯. 600 টাকা
৩০. 800 টাকা
৩১. 61 টাকা
৩২. $\frac{px}{100+x}$ টাকা; ভ্যাটের পরিমাণ 300 টাকা

৩৬. স্রোত থাকলে সময় বেশি লাগবে ৩৭. 40 টি
৩৮. $3\frac{1}{11}$ ঘণ্টা

অনুশীলনী ৪.১

১. 27 ২. $\sqrt{7}$ ৩. $\frac{10}{7}$ ৪. $\frac{ab}{3a+2b}$
৫. $\frac{a^8}{b^4}$ ৬. 1 ৭. 4 ৮. $\frac{1}{9}$
১৭. $\frac{3}{2}$ ১৮. 3 ১৯. 5 ২০. $0, 1$

অনুশীলনী ৪.২

১. ক) 4 খ) $\frac{1}{3}$ গ) $\frac{1}{2}$ ঘ) 4 ঙ) $\frac{5}{6}$
২. ক) 125 খ) 5 গ) 4
৪. ক) $\log_{10} 2$ খ) $\frac{13}{15}$ গ) 0

অনুশীলনী ৪.৩

১১. ক) 6.530×10^3 খ) 6.0831×10^1 গ) 2.45×10^{-4}
ঘ) 3.75×10^7 ঙ) 1.4×10^{-7}
১২. ক) 100000 খ) 0.00001 গ) 25300
ঘ) 0.009813 ঙ) 0.0000312
১৩. ক) 3 খ) 1 গ) 0
ঘ) $\bar{2}$ ঙ) $\bar{5}$
১৪. ক) পূর্ণক 1, অংশক .43136 খ) পূর্ণক 1, অংশক .80035
গ) পূর্ণক 0, অংশক .14768 ঘ) পূর্ণক $\bar{2}$, অংশক .65896
ঙ) পূর্ণক $\bar{4}$, অংশক .82802
১৫. ক) 1.66706 খ) $\bar{1}.64562$ গ) 0.81358 ঘ) $\bar{3}.78888$
১৬. ক) 0.95424 খ) 1.44710 গ) 1.62325

অনুশীলনী ৫.১

১. ab ২. -6 ৩. $-\frac{3}{5}$ ৪. $-\frac{5}{2}$
৫. $\frac{a+b}{2}$ ৬. $a+b$ ৭. $\frac{a+b}{2}$ ৮. $\sqrt{3}$
৯. $\{4(1+\sqrt{2})\}$ ১০. $\emptyset$ ১১. $\{-\frac{1}{3}\}$ ১২. $\{\frac{m+n}{2}\}$
১৩. $\{-\frac{7}{2}\}$ ১৪. $\{6\}$ ১৫. $28, 70$ ১৬. $\frac{3}{4}$
১৭. 72 ১৮. 3200 ২০. 18 ২১. 9
২২. পঁচিশ পয়সার মুদ্রা 100 টি, পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রা 20 টি ২৩. 120 কি.মি.
২৪. $10\frac{4}{5}$ কি.মি.

অনুশীলনী ৫.২

১১. ± 7 ১২. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ১৩. $-6, \frac{3}{2}$
১৪. $1, -\frac{3}{20}$ ১৫. $0, \frac{2}{3}$ ১৬. $\sqrt{ab}$
১৭. $0, a+b$ ১৮. $3, -\frac{1}{2}$ ১৯. $2, -\frac{2}{3}$
২০. $-a, -b$ ২১. $1, 1$ ২২. $1, \frac{1}{3}$
২৩. 78 বা 87 ২৪. 16 মিটার, 12 মিটার ২৫. 9 সে.মি., 12 সে.মি.
২৬. 27 সে.মি. ২৭. 21 জন, 20 টাকা ২৮. 70 জন
৩২. নাবিলের বয়স 24 বছর, শুভর বয়স 21 বছর ৩৩. 9 জন
৩৪. 4 : 30 টায়

অনুশীলনী ৯.১

২. $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}, \cot A = \frac{\sqrt{7}}{3}, \sec A = \frac{4}{\sqrt{7}}, \text{cosec } A = \frac{4}{3}$

৩. $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

৪. $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}$

২২. $\frac{1}{2}$

২৩. $\frac{3}{4}$

২৪. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

অনুশীলনী ৯.২

৮. $\frac{1}{2}$
৯. $\frac{3}{4}$
১০. $\frac{23}{5}$
১১. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
১৯. $A = 30^\circ,\ B = 30^\circ$
২০. $A = 30^\circ$
২১. $A = 37\frac{1}{2}^\circ,\ B = 7\frac{1}{2}^\circ$
২৩. $\theta = 90^\circ$
২৪. $\theta = 60^\circ$
২৫. $\theta = 60^\circ$
২৬. $\theta = 45^\circ, 60^\circ$
২৭. $\frac{7}{2}$

অনুশীলনী ১০

১০. 45.033 মিটার (প্রায়)
১১. 34.641 মিটার (প্রায়)
১২. 12.728 মিটার (প্রায়)
১৩. 10 মিটার
১৪. 21.651 মিটার (প্রায়)
১৫. 141.962 মিটার (প্রায়)
১৬. 27.713 মিটার (প্রায়) এবং 16 মিটার
১৭. 34.298 মিটার (প্রায়)
১৮. 44.785 মিটার (প্রায়)

অনুশীলনী ১১.১

১. $a^2 : b^2$
২. $\pi : 2\sqrt{\pi}$
৩. 45, 60
৪. 20%
৫. 18 : 25
৬. 13 : 7
৮. ক) $\frac{3}{4}$ খ) $\pm\sqrt{2ab - b^2}$ গ) $\frac{1}{2}, 2$

অনুশীলনী ১১.২

১০. 70%

১১. ক 40 টাকা, খ 60 টাকা, গ 120 টাকা, ঘ 80 টাকা

১২. 200, 240, 250

১৩. 9, 15, 21

১৪. 140

১৫. 81 রান, 54 রান, 36 রান

১৬. কর্মকর্তা 24000 টাকা, অফিস সহকারী 12000 টাকা, অফিস সহায়ক 6000 টাকা

১৭. 44%

১৮. 1% হ্রাস

১৯. 532 কুইন্টাল

২০. 8 : 9

২১. 1440 বর্গমিটার

২২. 13 : 12

অনুশীলনী ১২.১

১. সমঞ্জস, অনির্ভরশীল, একটিমাত্র সমাধান

২. সমঞ্জস, নির্ভরশীল, অসংখ্য সমাধান

৩. অসমঞ্জস, অনির্ভরশীল, সমাধান নেই

৪. সমঞ্জস, নির্ভরশীল, অসংখ্য সমাধান,

৫. সমঞ্জস, অনির্ভরশীল, একটিমাত্র সমাধান

৬. অসমঞ্জস, অনির্ভরশীল, সমাধান নেই

৭. সমঞ্জস, নির্ভরশীল, অসংখ্য সমাধান

৮. সমঞ্জস, অনির্ভরশীল, একটিমাত্র সমাধান

৯. সমঞ্জস, অনির্ভরশীল, একটিমাত্র সমাধান

১০. সমঞ্জস, অনির্ভরশীল, একটি সমাধান

অনুশীলনী ১২.২

১. $(4, -1)$

২. $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$

৩. (a, b)

৪. $(4, -1)$

৫. $(1, 2)$

৬. $\left(\frac{c(b-c)}{a(b-a)}, \frac{c(c-a)}{b(b-a)}\right)$

৭. $(-\frac{17}{2}, 4)$

৮. $(2, 3)$

৯. $(3, 2)$

১০. $(\frac{5}{2}, -\frac{22}{3})$

১১. $(1, 2)$

১২. $(2, -1)$

১৩. (a, b)

১৪. $(2, 4)$

১৫. $(-5, -3)$

অনুশীলনী ১২.৩

১. $(2, 2)$

২. $(2, 3)$

৩. $(-7, 3)$

৪. $(4, 5)$

৫. $(2, 3)$

৬. $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

৭. $(1, \frac{1}{2})$
৮. $(2, 6)$
৯. -2
১০. 2

অনুশীলনী ১২.৪

১০. $\frac{7}{9}$
১১. $\frac{15}{26}$
১২. 27
১৩. 37 বা 73
১৪. 30 বছর
১৫. দৈর্ঘ্য 17 মি., প্রস্থ 9 মি.
১৬. নৌকার বেগ ঘণ্টায় 10 কি.মি.
১৭. 4000 টাকা, 125 টাকা
২০. 11 ও 6 টি
২১. $\frac{29}{57}$ ভাগ
২২. 40 ও 20 মিটার/সেকেন্ড
২৩. 7 টি
২৪. 22 বার

অনুশীলনী ১৩.১

৫. -7 এবং -75
৬. 129 তম
৭. 100 তম
৮. 0
৯. n^2
১০. 360
১১. 320
১২. 42
১৩. 1771
১৪. -620
১৫. 18
১৬. 50
১৭. $2 + 4 + 6 + \ldots$
১৮. 110
১৯. 0
২০. $-(m + n)$
২৩. 50 টি

অনুশীলনী ১৩.২

৫. $\frac{1}{2}$
৬. $\frac{3}{2}(3^{14} - 1)$
৭. 9 ম পদ
৮. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
৯. 9 ম পদ
১০. $x = 15$ এবং $y = 45$
১১. $x = 9, y = 27, z = 81$
১২. 86
১৩. 1
১৪. $55\log2$
১৫. $650\log2$
১৬. $n = 7$
১৭. 0
১৮. $n = 6, S = 21$
১৯. $n = 5, S = 55$
২১. 20
২২. 24.47 মিলিমিটার (প্রায়)

অনুশীলনী ১৬.১

১. 20 মিটার, 15 মিটার
২. 12 মিটার
৩. 12 বর্গমিটার
৪. 327.26 বর্গ সে.মি., (প্রায়)
৫. 5 মিটার
৬. 30°
৭. 12 বা 16 মিটার
৮. 44.44 কিলোমিটার (প্রায়)
৯. 24.249 সে.মি. (প্রায়), 254.611 বর্গ সে.মি., (প্রায়)

অনুশীলনী ১৬.২

১. 96 মিটার
২. 1056 বর্গমিটার
৩. 30 মিটার এবং 20 মিটার
৪. 400 বর্গমিটার
৫. 6400 টি
৬. 16 মিটার ও 10 মিটার
৭. 16.5 মিটার ও 22 মিটার
৮. 35.35 মিটার (প্রায়)
৯. 48.66 সে.মি. (প্রায়)
১০. 72 সে.মি., 1944 বর্গ সে.মি.
১১. 17 সে.মি. ও 9 সে.মি.
১২. 95.75 বর্গ সে.মি., (প্রায়)
১৩. 6.363 বর্গমিটার (প্রায়)

অনুশীলনী ১৬.৩

১. 32.987 সে.মি. (প্রায়)
২. 31.513 মিটার (প্রায়)
৩. 20.008° (প্রায়)
৪. 128.282 বর্গ সে.মি. (প্রায়)
৫. 7.003 মিটার (প্রায়)
৬. 175.93 বর্গমিটার (প্রায়)
৭. 20 বার
৮. 49.517 মিটার (প্রায়)
৯. $3\sqrt{3} : \pi$

অনুশীলনী ১৬.৪

৮. 636 বর্গমিটার, 20.5 মিটার, 864 ঘনমিটার
৯. 14040 বর্গ সে.মি.
১০. 12 মিটার, 4 মিটার
১১. 1 সে.মি.
১২. 300000 টি
১৩. 34.641 সে.মি. (প্রায়)
১৪. 534.071 বর্গ সে.মি. (প্রায়), 942.48 ঘন সে.মি. (প্রায়)
১৫. 5.305 সে.মি., 3 সে.মি.
১৬. 7823.591 বর্গ সে.মি.
১৭. 147.027 কিলোগ্রাম (প্রায়)

অনুশীলনী ১৭

১০. নিজে কর
১১. 60 কেজি

পরিশিষ্ট

দাখিল নবম-দশম শ্রেণির গণিত পাঠ্যবইয়ের তৃতীয়, ষষ্ঠ ও দ্বাদশ অধ্যায়ের সাথে সম্পর্কিত কিছু অতিরিক্ত বিষয়বস্তু সংযুক্তি হিসেবে যুক্ত করা হয়েছে। কারণ ২০২৫ সালে দাখিল নবম শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীরা পূর্বতন শ্রেণিতে (দাখিল সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণি) 'জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০২২' অনুযায়ী অধ্যয়ন করেছে। 'জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০২২' অনুযায়ী দাখিল সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণির গণিত পাঠ্যপুস্তকে উক্ত বিষয়বস্তু অন্তর্ভুক্ত ছিল না। তাই শিখনের ধারাবাহিকতা ও কার্যকর শিখনের জন্য উক্ত বিষয়বস্তু সংযুক্ত করা হয়েছে।

উল্লেখ্য যে, দাখিল নবম শ্রেণির গণিত বিষয়ের শিখনফল অনুযায়ী ধারাবাহিক ও সামষ্টিক মূল্যায়ন অনুষ্ঠিত হবে।

তৃতীয় অধ্যায়ের সংযুক্তি

ভগ্নাংশের লঘুকরণ

কোনো ভগ্নাংশের লঘুকরণের অর্থ হলো ভগ্নাংশটিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করা। এ জন্য লব ও হরকে এদের সাধারণ গুণনীয়ক বা উৎপাদক দ্বারা ভাগ করা হয়। কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের মধ্যে কোনো সাধারণ গুণনীয়ক বা উৎপাদক না থাকলে এরূপ ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ বলা হয়।

উদাহরণ ১। $\dfrac{4a^2bc}{6ab^2c}$ কে লঘুকরণ কর।

সমাধান : $\dfrac{4a^2bc}{6ab^2c} = \dfrac{2\times2\times a\times a\times b\times c}{2\times3\times a\times b\times b\times c} = \dfrac{2a}{3b}.$

ভগ্নাংশের লঘুকরণের মাধ্যমে নিচের খালি ঘরগুলো পূরণ কর (দুইটি করে দেখানো হলো) :

বিকল্প পদ্ধতি : $\dfrac{4a^2bc}{6ab^2c} = \dfrac{2abc\times2a}{2abc\times3b} = \dfrac{2a}{3b}$. [লব ও হরের গ.সা.গু. $2abc$]

$\dfrac{9}{12} = \dfrac{3\times3}{2\times2\times3} = \dfrac{3}{4}$	$\dfrac{2^3}{2^4} =$
$\dfrac{a^2b}{ab^2} =$	$\dfrac{x^3}{x^2} = \dfrac{x\times x\times x}{x\times x} = x$
$\dfrac{3x}{6xy} =$	$\dfrac{2mn}{4m^2} =$

উদাহরণ ২। $\dfrac{2a^2+3ab}{4a^2-9b^2}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

সমাধান : $\dfrac{2a^2+3ab}{4a^2-9b^2} = \dfrac{2a^2+3ab}{(2a)^2-(3b)^2}$

$$= \frac{a(2a+3b)}{(2a+3b)(2a-3b)} = \frac{a}{2a-3b}. \quad [\because x^2-y^2=(x+y)(x-y)]$$

উদাহরণ ৩। লঘুকরণ কর : $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}$

সমাধান : $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2} = \dfrac{x^2+2x+3x+6}{x^2+x+2x+2}$

$$= \frac{x(x+2)+3(x+2)}{x(x+1)+2(x+1)} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+1}.$$

সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ

সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশকে সমহরবিশিষ্ট ভগ্নাংশও বলে। এক্ষেত্রে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলোর হর সমান করতে হয়। $\dfrac{a}{2b}$ ও $\dfrac{m}{3n}$ ভগ্নাংশ দুইটি বিবেচনা করি। ভগ্নাংশ দুইটির হর $2b$ এবং $3n$ এর ল.সা.গু. $6bn$.

অতএব, দুইটি ভগ্নাংশেরই হর $6bn$ করতে হবে।

এখানে, $\dfrac{a}{2b} = \dfrac{a\times 3n}{2b\times 3n}$ $[\because 6bn \div 2b = 3n]$

$= \dfrac{3an}{6bn}$

এবং $\dfrac{m}{3n} = \dfrac{m\times 2b}{3n\times 2b}$ $[\because 6bn \div 3n = 2b]$

$= \dfrac{2bm}{6bn}.$

$\therefore$ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ দুইটি $\dfrac{3an}{6bn}, \dfrac{2bm}{6bn}.$

সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ করার নিয়ম

- ভগ্নাংশগুলোর হরের ল.সা.গু. বের করতে হয়।
- ল.সা.গু. কে প্রত্যেক ভগ্নাংশের হর দ্বারা ভাগ করে ভাগফল বের করতে হয়।
- প্রাপ্ত ভাগফল দ্বারা সংশ্লিষ্ট ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ করতে হয়।

উদাহরণ ৪ । সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর : $\frac{a}{4x}, \frac{b}{2x^2}$.

সমাধান : হর $4x$ এবং $2x^2$ এর ল.সা.গু. $4x^2$

$$\therefore \quad \frac{a}{4x} = \frac{a \times x}{4x \times x} \quad [\because 4x^2 \div 4x = x]$$

$$= \frac{ax}{4x^2}.$$

এবং $$\frac{b}{2x^2} = \frac{b \times 2}{2x^2 \times 2} \qquad [\because 4x^2 \div 2x^2 = 2]$$

$$= \frac{2b}{4x^2}.$$

$\therefore$ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ দুইটি $\frac{ax}{4x^2}, \frac{2b}{4x^2}$.

উদাহরণ ৫ । সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তর কর : $\frac{2}{a^2-4}, \frac{5}{a^2+3a-10}$

সমাধান : ১ম ভগ্নাংশের হর $= a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$

২য় ভগ্নাংশের হর $= a^2 + 3a - 10 = a^2 - 2a + 5a - 10$

$= a(a-2) + 5(a-2) = (a-2)(a+5)$

হর দুইটির ল.সা.গু. $(a+2)(a-2)(a+5)$

এবার ভগ্নাংশগুলোকে সমহরবিশিষ্ট করি।

$$\therefore \frac{2}{a^2-4} = \frac{2}{(a+2)(a-2)} = \frac{2 \times (a+5)}{(a+2)(a-2) \times (a+5)}$$ [লব ও হরকে $(a+5)$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{2(a+5)}{(a^2-4)(a+5)}$$

এবং $$\frac{5}{a^2+3a-10} = \frac{5}{(a-2)(a+5)} = \frac{5 \times (a+2)}{(a-2)(a+5) \times (a+2)}$$ [লব ও হরকে $(a+2)$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{5(a+2)}{(a^2-4)(a+5)}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ দুইটি $\frac{2(a+5)}{(a^2-4)(a+5)}, \frac{5(a+2)}{(a^2-4)(a+5)}$

উদাহরণ ৬। সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত কর :

$$\frac{1}{x^2+3x}, \frac{2}{x^2+5x+6}, \frac{3}{x^2-x-12}.$$

সমাধান : ১ম ভগ্নাংশের হর $= x^2+3x = x(x+3)$

২য় ভগ্নাংশের হর $= x^2+5x+6 = x^2+2x+3x+6$

$$= x(x+2)+3(x+2) = (x+2)(x+3)$$

৩য় ভগ্নাংশের হর $= x^2-x-12 = x^2+3x-4x-12$

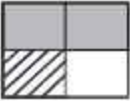
$$= x(x+3)-4(x+3) = (x+3)(x-4)$$

হর তিনটির ল.সা.গু. $x(x+2)(x+3)(x-4)$

এবার ভগ্নাংশগুলোকে সমহরবিশিষ্ট করি-

$\therefore$ ১ম ভগ্নাংশ $= \frac{1}{x^2+3x} = \frac{1\times(x+2)(x-4)}{x(x+3)\times(x+2)(x-4)} = \frac{(x+2)(x-4)}{x(x+2)(x+3)(x-4)}$

২য় ভগ্নাংশ $= \frac{2}{x^2+5x+6} = \frac{2}{(x+2)(x+3)} = \frac{2\times x(x-4)}{(x+2)(x+3)\times x(x-4)}$

$$= \frac{2x(x-4)}{x(x+2)(x+3)(x-4)}$$

৩য় ভগ্নাংশ $= \frac{3}{x^2-x-12} = \frac{3}{(x+3)(x-4)} = \frac{3\times x(x+2)}{(x+3)(x-4)\times x(x+2)}$

$$= \frac{3x(x+2)}{x(x+2)(x+3)(x-4)}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ তিনটি যথাক্রমে

$$\frac{(x+2)(x-4)}{x(x+2)(x+3)(x-4)}, \frac{2x(x-4)}{x(x+2)(x+3)(x-4)}, \frac{3x(x+2)}{x(x+2)(x+3)(x-4)}.$$

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ ও সরলীকরণ

লক্ষ করি :

পাটিগণিত	বীজগণিত
সম্পূর্ণ বর্গাকার ক্ষেত্রটিকে 1 ধরা হলে, এর	সম্পূর্ণ বর্গাকার ক্ষেত্রটিকে x ধরা হলে, এর
কালো অংশ $= 1$ এর $\frac{2}{4} = \frac{2}{4}$	কালো অংশ $= x$ এর $\frac{2}{4} = \frac{2x}{4}$
দাগটানা অংশ $= 1$ এর $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	দাগটানা অংশ $= x$ এর $\frac{1}{4} = \frac{x}{4}$
$\therefore$ মোট রং করা অংশ $= \boxed{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}}$	$\therefore$ মোট রং করা অংশ $= \boxed{\frac{2x}{4} + \frac{x}{4}}$
(কালো ও দাগ কাটা) $= \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$	(কালো ও দাগ কাটা) $= \frac{2x+x}{4} = \frac{3x}{4}$
$\therefore$ সাদা অংশ $= \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \boxed{\frac{4}{4} - \frac{3}{4}}$	$\therefore$ সাদা অংশ $= x - \frac{3x}{4} = \boxed{\frac{4x}{4} - \frac{3x}{4}}$
$= \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$	$= \frac{4x-3x}{4} = \frac{x}{4}$

লক্ষ করি, উপরের ঘরের মধ্যে লেখা ভগ্নাংশগুলোকে যোগ ও বিয়োগের ক্ষেত্রে সাধারণ হরবিশিষ্ট করা হয়েছে।

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগের নিয়ম

- ভগ্নাংশগুলোকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করতে হয়।
- যোগফলের হর লঘিষ্ঠ সাধারণ হর এবং লব রূপান্তরিত ভগ্নাংশগুলোর লবের যোগফল।
- বিয়োগফলের হর লঘিষ্ঠ সাধারণ হর এবং লব রূপান্তরিত ভগ্নাংশগুলোর লবের বিয়োগফল।

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ

উদাহরণ ৭। যোগ কর : $\frac{x}{a}$ এবং $\frac{y}{a}$

সমাধান : $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = \frac{x+y}{a}$

উদাহরণ ৮। যোগফল নির্ণয় কর : $\frac{3a}{2x}+\frac{b}{2y}$.

সমাধান : $\frac{3a}{2x}+\frac{b}{2y}=\frac{3a\times y}{2x\times y}+\frac{b\times x}{2y\times x}=\frac{3ay+bx}{2xy}$ [$2x$, $2y$ এর ল.সা.গু. $2xy$ নিয়ে]

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের বিয়োগ

উদাহরণ ৯। বিয়োগ কর : $\frac{a}{x}$ থেকে $\frac{b}{x}$

সমাধান : $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=\frac{a-b}{x}$

উদাহরণ ১০। $\frac{2a}{3x}$ থেকে $\frac{b}{3y}$ বিয়োগ কর। (3x ও 3y এর ল.সা.গু 3xy)

সমাধান : $\frac{2a}{3x}-\frac{b}{3y}=\frac{2a\times y}{3xy}-\frac{b\times x}{3xy}=\frac{2ay-bx}{3xy}$

উদাহরণ ১১। বিয়োগফল নির্ণয় কর : $\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a^2-4}$. (3x ও 3y এর ল.সা.গু 3xy)

সমাধান : $\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a^2-4}=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{(a+2)(a-2)}=\frac{1\times(a-2)}{(a+2)\times(a-2)}-\frac{1}{(a+2)(a-2)}$

$=\frac{(a-2)-1}{(a+2)(a-2)}=\frac{a-2-1}{(a+2)(a-2)}=\frac{a-3}{a^2-4}$.

কাজ : নিচের ছকটি পূরণ কর :	
$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=$	$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=$
$\frac{3}{m}+\frac{2}{n}=$	$\frac{5}{ab}-\frac{1}{a}=$
$\frac{2}{x}+\frac{5}{2x}=$	$\frac{7}{xyz}-\frac{2z}{xy}=$
$\frac{3}{m}+\frac{2}{m^2}=$	$\frac{5}{p^2}-\frac{2}{3p}=$

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের সরলীকরণ

প্রক্রিয়া চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় ভগ্নাংশকে একটি ভগ্নাংশে বা রাশিতে পরিণত করাই হলো ভগ্নাংশের সরলীকরণ। এতে প্রাপ্ত ভগ্নাংশটিকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ১২। সরল কর : $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}$.

সমাধান : $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}=\dfrac{a\times(a-b)+b\times(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{a^2-ab+ab+b^2}{(a+b)(a-b)}$

$=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

উদাহরণ ১৩। সরল কর : $\dfrac{x+y}{xy}-\dfrac{y+z}{yz}$.

সমাধান : $\dfrac{x+y}{xy}-\dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{z\times(x+y)-x\times(y+z)}{xyz}=\dfrac{zx+zy-xy-xz}{xyz}$

$=\dfrac{yz-xy}{xyz}=\dfrac{y(z-x)}{xyz}=\dfrac{z-x}{xz}$.

উদাহরণ ১৪। সরল কর : $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}-\dfrac{z-x}{zx}$

সমাধান : $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}-\dfrac{z-x}{zx}=\dfrac{(x-y)\times z+(y-z)\times x-(z-x)\times y}{xyz}$

$=\dfrac{zx-yz+xy-zx-yz+xy}{xyz}=\dfrac{2xy-2yz}{xyz}=\dfrac{2y(x-z)}{xyz}=\dfrac{2(x-z)}{xz}$

ষষ্ঠ অধ্যায়ের সংযুক্তি

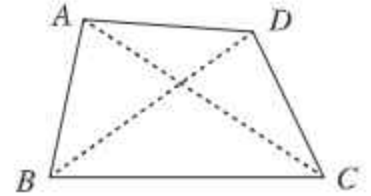
পূর্ববর্তী শ্রেণিতে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সম্পর্কে আলোচনা হয়েছে। আমরা ত্রিভুজ অঙ্কন করতে যেয়ে দেখেছি যে, একটি সুনির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকতে তিনটি পরিমাপের প্রয়োজন। স্বাভাবিকভাবেই প্রশ্ন জাগে একটি চতুর্ভুজ আঁকতে চারটি পরিমাপ যথেষ্ট কি না। বর্তমান অধ্যায়ে এ বিষয়ে আলোচনা করা হবে। তাছাড়া বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজ যেমন সামান্তরিক, আয়ত, বর্গ, রম্বস এর বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য রয়েছে। এ অধ্যায়ে বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজের এ সকল বৈশিষ্ট্য ও চতুর্ভুজ অঙ্কন বিষয়ে আলোচনা থাকবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- চতুর্ভুজের ধর্মাবলি যাচাই ও যুক্তিমূলক প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত হতে চতুর্ভুজ আঁকতে পারবে।
- ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।
- আয়তাকার ঘনবস্তুর চিত্র আঁকতে পারবে।
- আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।

চতুর্ভুজ (Quadrilateral)

চারটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র একটি চতুর্ভুজ। চিত্র দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটি একটি চতুর্ভুজক্ষেত্র।

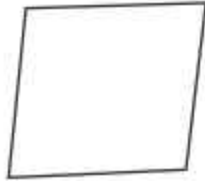
চতুর্ভুজের চারটি বাহু আছে। যে চারটি রেখাংশ দ্বারা ক্ষেত্রটি আবদ্ধ হয়, এ চারটি রেখাংশই চতুর্ভুজের বাহু।

A, B, C ও D বিন্দু চারটির যেকোনো তিনটি সমরেখ নয়। AB, BC, CD ও DA রেখাংশ চারটি সংযোগে $ABCD$ চতুর্ভুজ গঠিত হয়েছে। AB, BC, CD ও DA চতুর্ভুজটির চারটি বাহু। A, B, C ও D চারটি কৌণিক বিন্দু বা শীর্ষবিন্দু। $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ ও $\angle DAB$ চতুর্ভুজের চারটি কোণ। A ও B শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে C ও D শীর্ষের বিপরীত শীর্ষবিন্দু। AB ও CD পরস্পর বিপরীত বাহু এবং AD ও BC পরস্পর বিপরীত বাহু। এক শীর্ষবিন্দুতে যে দুইটি বাহু মিলিত হয়, এরা সন্নিহিত বাহু। যেমন, AB ও BC বাহু দুইটি সন্নিহিত বাহু। AC ও BD রেখাংশদ্বয় $ABCD$ চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণ। চতুর্ভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে এর পরিসীমা বলে। $ABCD$ চতুর্ভুজের পরিসীমা $(AB+BC+CD+DA)$ এর দৈর্ঘ্যের সমান। চতুর্ভুজকে অনেক সময় '□' প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

চতুর্ভুজের প্রকারভেদ (Types of Quadrilaterals)

সামান্তরিক : যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর **সমান্তরাল**, তা সামান্তরিক। সামান্তরিকের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **সামান্তরিকক্ষেত্র** বলে।

আয়ত : যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, তাই আয়ত। আয়তের চারটি কোণ সমকোণ। আয়তের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে আয়তক্ষেত্র বলে।

রম্বস : রম্বস এমন একটি সামান্তরিক যার সন্নিহিত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। অর্থাৎ, রম্বসের বিপরীত বাহুগুলো সমান্তরাল এবং চারটি বাহু সমান। রম্বসের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে রম্বসক্ষেত্র বলে।

বর্গ : বর্গ এমন একটি আয়ত যার সন্নিহিত বাহুগুলো সমান। অর্থাৎ, বর্গ এমন একটি সামান্তরিক যার প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ এবং বাহুগুলো সমান। বর্গের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে বর্গক্ষেত্র বলে।

ট্রাপিজিয়াম : যে চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল, একে ট্রাপিজিয়াম বলা হয়। ট্রাপিজিয়ামের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র বলে।

ঘুড়ি : যে চতুর্ভুজের দুই জোড়া সন্নিহিত বাহু সমান, একে ঘুড়ি বলা হয়।

কাজ:

১। তোমার আশেপাশের বিভিন্ন বস্তুর ধারকে সরলরেখা ধরে সামান্তরিক, আয়ত, বর্গ ও রম্বস চিহ্নিত কর।

২। উক্তিগুলো সঠিক কিনা যাচাই কর:

(ক) বর্গ একটি আয়ত, আবার বর্গ একটি রম্বসও।

(খ) ট্রাপিজিয়াম একটি সামান্তরিক।

(গ) সামান্তরিক একটি ট্রাপিজিয়াম।

(ঘ) আয়ত বা রম্বস বর্গ নয়।

৩। বর্গের সংজ্ঞায় বলা হয়েছে বর্গ এমন একটি আয়ত যার বাহুগুলো সমান। রম্বসের মাধ্যমে বর্গের সংজ্ঞা দেওয়া যায় কি ?

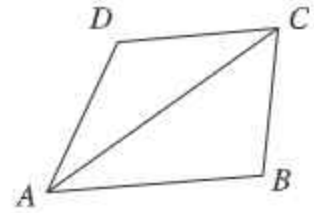
চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য (Theorems related to Quadrilaterals)

বিভিন্ন প্রকারের চতুর্ভুজের কিছু সাধারণ ধর্ম রয়েছে। এ ধর্মগুলো উপপাদ্য আকারে প্রমাণ করা হলো।

উপপাদ্য ১

চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি চার সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ।

অঙ্কন: A ও C যোগ করি। AC কর্ণটি চতুর্ভুজটিকে ΔABC ও ΔADC দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করেছে।

প্রমাণ:

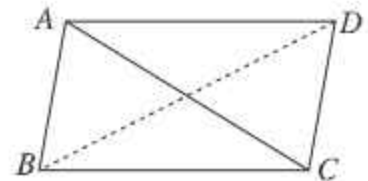
ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC এ $\angle BAC + \angle ACB + \angle B = 2$ সমকোণ।	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]
(২) অনুরূপভাবে, ΔDAC এ $\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 2$ সমকোণ।	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]
(৩) অতএব, $\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle BAC + \angle ACB + \angle B = (2+2)$ সমকোণ।	[(১) ও (২) থেকে]
(৪) $\angle DAC + \angle BAC = \angle A$ এবং $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$	[সন্নিহিত কোণের যোগফল] [সন্নিহিত কোণের যোগফল]
সুতরাং, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ (প্রমাণিত)	[(৩) থেকে]

উপপাদ্য ২

সামান্তরিকের বিপরীত বাহু ও কোণগুলো পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ একটি সামান্তরিক এবং AC ও BD তার দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে,

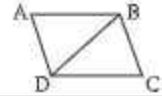
(ক) AB বাহু $= CD$ বাহু, AD বাহু $= BC$ বাহু

(খ) $\angle BAD = \angle BCD, \angle ABC = \angle ADC$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) $AB \parallel DC$ এবং AC তাদের ছেদক, সুতরাং $\angle BAC = \angle ACD$	[একান্তর কোণ সমান]
(২) আবার, $BC \parallel AD$ এবং AC তাদের ছেদক, সুতরাং $\angle ACB = \angle DAC$	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন ΔABC ও ΔADC এ $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle ACB = \angle DAC$ এবং AC বাহু সাধারণ । $\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC$ অতএব, $AB = CD, BC = AD$ ও $\angle ABC = \angle ADC$ অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\Delta BAD \cong \Delta BCD$ সুতরাং, $\angle BAD = \angle BCD$ [প্রমাণিত]	[ত্রিভুজের কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]

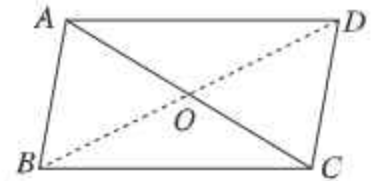
কাজঃ

১ । প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হলে, তা একটি সামান্তরিক ।

২ । দেওয়া আছে, $ABCD$ চতুর্ভুজে $AB = CD$ এবং $\angle ABD = \angle BDC$.
প্রমাণ কর যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক ।

উপপাদ্য ৩

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে ।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AO = CO$, $BO = DO$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) AB ও DC রেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং AC এদের ছেদক । অতএব, $\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACD$	[একান্তর কোণ সমান]
(২) AB ও DC রেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং BD এদের ছেদক। সুতরাং, $\angle BDC =$ একান্তর $\angle ABD$	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন, ΔAOB ও ΔCOD এ $\angle OAB = \angle OCD$, $\angle OBA = \angle ODC$ এবং $AB = DC$ সুতরাং, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ অতএব, $AO = CO$ এবং $BO = DO$ (প্রমাণিত)	$\because \angle BAC = \angle ACD; \angle BDC = \angle ABD$ [ত্রিভুজের কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]

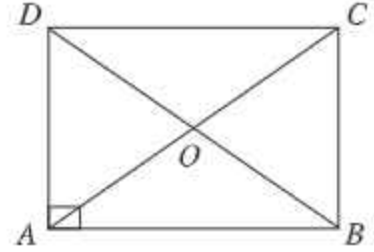
কাজ : ১ । প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক ।

উপপাদ্য ৪

আয়তের কর্ণদ্বয় সমান ও পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ আয়তের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে,

(i) $AC = BD$

(ii) $AO = CO,\ BO = DO$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) আয়ত একটি সামান্তরিক। সুতরাং, $AO = CO,\ BO = DO$	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) এখন ΔABD ও ΔACD এ	
$AB = DC$	[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান]
এবং $AD = AD$	[সাধারণ বাহু]
অন্তর্ভুক্ত $\angle DAB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle ADC$	প্রত্যেকে সমকোণ]
সুতরাং, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	
অতএব, $AC = BD$ (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের বাহু-কোণ-বাহু - উপপাদ্য]

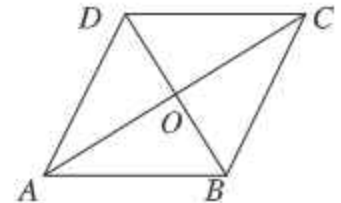
> **কাজ:**
> ১। প্রমাণ কর যে, আয়তের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।

উপপাদ্য ৫

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে,

(i) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 1$ সমকোণ

(ii) $AO = CO,\ BO = DO$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) রম্বস একটি সামান্তরিক। সুতরাং, $AO = CO,\ BO = DO$	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) এখন ΔAOB ও ΔBOC এ	
$AB = BC$	[রম্বসের বাহুগুলো সমান]
$AO = CO$	[(১) থেকে]
এবং $OB = OB$	[সাধারণ বাহু]
অতএব, $\Delta AOB \cong \Delta BOC$	[ত্রিভুজের বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

সুতরাং $\angle AOB = \angle BOC$.

$\angle AOB + \angle BOC = 1$ সরলকোণ $= 2$ সমকোণ ।

$\angle AOB = \angle BOC = 1$ সমকোণ ।

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে,

$\angle COD = \angle DOA = 1$ সমকোণ (প্রমাণিত)

> কাজঃ
> ১। দেখাও যে, বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান এবং পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
> ২। একজন রাজমিস্ত্রি একটি আয়তাকার কংক্রিট স্ল্যাব তৈরি করেছেন। তিনি কত বিভিন্ন ভাবে নিশ্চিত হতে পারেন যে তাঁর তৈরি স্ল্যাবটি সত্যিই আয়তাকার ?

চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (Area of Quadrilaterals)

একটি চতুর্ভুজের একটি কর্ণ দ্বারা চতুর্ভুজক্ষেত্রটি দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত হয়। অতএব, চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের যোগফলের সমান। পূর্ববর্তী শ্রেণিতে আমরা বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছি। আবার আয়ত ও সামান্তরিকের ভূমি ও উচ্চতা একই হলেও উল্লিখিত ক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান। নিচে রম্বস ও ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়কৌশল নিয়ে আলোচনা করা হবে।

(ক) ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:

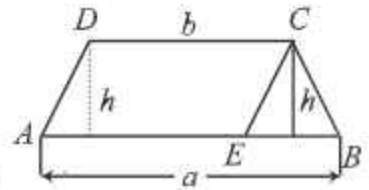
$ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম যেখানে $AB \parallel CD, AB=a, CD=b$ এবং AB ও CD এর লম্ব দূরত্ব $=h$

C বিন্দু দিয়ে $DA \parallel CE$ আঁকি।

$\therefore$ $AECD$ একটি সামান্তরিক। চিত্র থেকে

$ABCD$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ $AECD$ সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $+$ CEB ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= b \times h + \frac{1}{2}(a-b) \times h$$

$$= \frac{1}{2}(a+b) \times h$$

> ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টির গড় × উচ্চতা

> কাজ :
> ১। বিকল্প পদ্ধতিতে ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

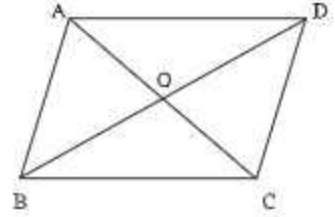
রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। তাই রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য জানা থাকলে সহজেই রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, $ABCD$ রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে a ও b দ্বারা নির্দেশ করি।

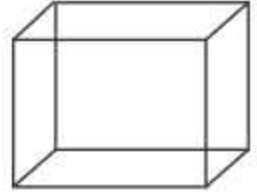
রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= DAC$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $+ BAC$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

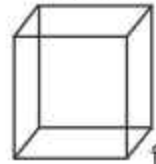
$$= \frac{1}{2}\cdot a\times\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}b$$

$$= \frac{1}{2}a\times b$$

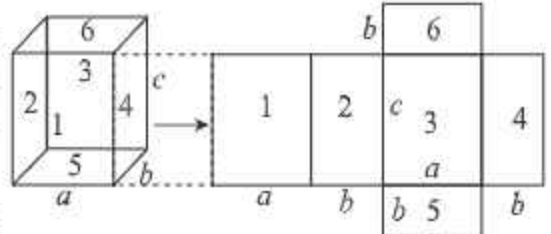
রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = কর্ণদ্বয়ের গুণফলের অর্ধেক

ঘনবস্তু (Solid)

বই, বাক্স, ইট, ফুটবল ইত্যাদি ঘনবস্তু। ঘনবস্তু আয়তাকার, বর্গাকার, গোলাকার ও অন্যান্য আকারের হতে পারে। ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে।

চিত্র-১ এর বস্তুটি আয়তাকার ঘনবস্তু। এর মোট ছয়টি আয়তাকার পৃষ্ঠ বা তল আছে যাদের প্রত্যেকটি একটি আয়তক্ষেত্র। পরস্পর বিপরীত পাশের পৃষ্ঠদ্বয় সমান ও সমান্তরাল। কাজেই পরস্পর বিপরীত পাশের দুইটি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সমান।

চিত্র-১

চিত্র-২ এর বস্তুটি বর্গাকার ঘনবস্তু। এর মোট ছয়টি পরস্পর সমান বর্গাকার পৃষ্ঠ বা তল আছে যাদের প্রত্যেকটি একটি বর্গক্ষেত্র। আবার, পরস্পর বিপরীত পৃষ্ঠদ্বয় সমান্তরাল। বর্গাকার ঘনবস্তুকে ঘনক (cube) বলা হয়। পরস্পর দুইটি করে পৃষ্ঠের ছেদ-রেখাংশকে ঘনকের ধার বা বাহু বলা হয়। ঘনকের সকল ধার বা বাহু পরস্পর সমান। কাজেই ঘনকের সকল পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

চিত্র-২

ঘনবস্তুর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

(ক) আয়তাকার ঘনবস্তু : একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য a একক হলে, চিত্রানুসারে, ঘনবস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \{(ab + ab) + (bc + bc) + (ac + ac)\}$ বর্গএকক $= 2(ab + bc + ac)$ বর্গএকক

(খ) ঘনক : একটি ঘনকের ধার a একক হলে, এর ছয়টি পৃষ্ঠের প্রতিটির ক্ষেত্রফল $= a \times a$ বর্গ একক $= a^2$ বর্গ একক। অতএব, ঘনকটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ বর্গ একক।

উদাহরণ। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 7.5 সে.মি., প্রস্থ 6 সে.মি ও উচ্চতা 4 সে.মি.। ঘনবস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, কোনো আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য a একক, প্রস্থ b একক ও উচ্চতা c একক হলে, বস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

$= 2(ab + bc + ac)$ বর্গ একক।

এখানে, $a = 7.5$ সে.মি., $b = 6$ সে.মি. এবং $c = 4$ সে.মি.

$\therefore$ প্রদত্ত আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

$= 2\,(7.5 \times 6 + 6 \times 4 + 7.5 \times 4)$ বর্গ সে.মি.

$= 2(45+24+30)$ বর্গ সে.মি.

$= 2\times99$ বর্গ সে.মি.

$= 198$ বর্গ সে.মি.

প্রয়োজনীয় উপপাদ্যের প্রমাণ

উপপাদ্য ২

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে, উৎপন্ন বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। ফলে O বিন্দুতে $\angle AOC, \angle COB, \angle BOD, \angle AOD$ কোণ উৎপন্ন হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOC =$ বিপ্রতীপ $\angle BOD$

এবং $\angle COB =$ বিপ্রতীপ $\angle AOD$।

প্রমাণ :

OA রশ্মির O বিন্দুতে CD রেখা মিলিত হয়েছে।

$\angle AOC + \angle AOD =$ ১ সরলকোণ $=$ ২ সমকোণ। [উপপাদ্য ১]

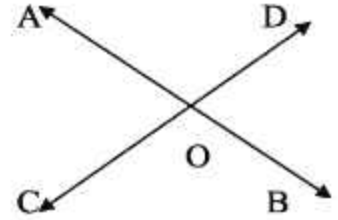
আবার, OD রশ্মির O বিন্দুতে AB রেখা মিলিত হয়েছে।

$\therefore \angle AOD + \angle BOD =$ ১ সরলকোণ $=$ ২ সমকোণ।

[উপপাদ্য ১]

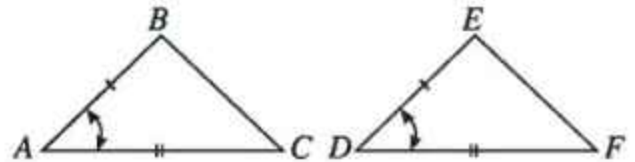
সুতরাং $\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$

$\therefore \angle AOC = \angle BOD$ [উভয় পক্ষ থেকে $\angle AOD$ বাদ দিয়ে] অনুরূপে দেখানো যায়, $\angle COB = \angle AOD$

[প্রমাণিত]

উপপাদ্য ৬ (বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এ AB = DE, AC = DF এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle EDF$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC = \angle DEF$

প্রমাণ :

(১) $\angle ABC$ কে $\angle DEF$ এর উপর এমনভাবে স্থাপন করি যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর ও AB বাহু DE বাহু বরাবর এবং DE বাহুর যে পাশে F আছে C বিন্দু ঐপাশে পড়ে।

তাহলে AB = DE বলে B বিন্দু অবশ্যই E বিন্দুর উপর পড়বে।

(২) যেহেতু $\angle BAC = \angle EDF$ এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে, সুতরাং AC বাহু DF বাহু বরাবর পড়বে। (কোণের সর্বসমতা)

(৩) AC = DF বলে C বিন্দু অবশ্যই F বিন্দুর উপর পড়বে। (বাহুর সর্বসমতা)

(৪) এখন B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়ে বলে BC বাহু অবশ্যই EF বাহুর সাথে পুরোপুরি মিলে যাবে।

অতএব, $\angle ABC, \angle DEF$ এর উপর সমাপতিত হবে।

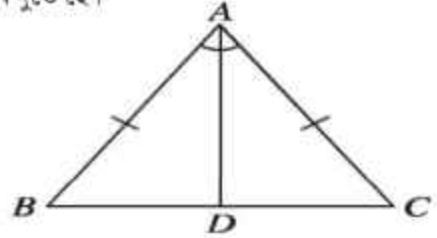
$\therefore \angle ABC = \angle DEF$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৭

যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজে AB = AC।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC = \angle ACB$

অঙ্কন : $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD আঁকি যেন তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ এবং $\triangle ACD$এ

(১) AB = AC (প্রদত্ত)

(২) AD সাধারণ বাহু এবং

(৩) অন্তর্ভুক্ত $\angle BAD=$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CAD$(অঙ্কনানুসারে)

সুতরাং,$\triangle ABD=\triangle ACD$[বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

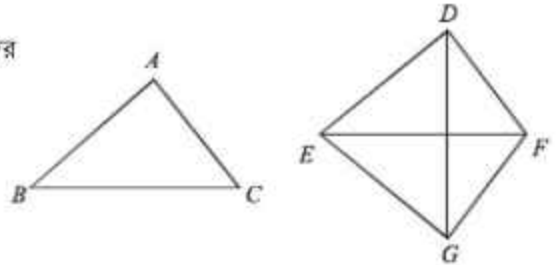
$\therefore \angle ABD= \angle ACD$অর্থাৎ, $\angle ABC= \angle ACB$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৯ (বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য)

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$এবং $\triangle DEF$ এ

$AB = DE, AC = DF$ এবং $BC = EF.$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC \cong \angle DEF$

প্রমাণ : মনে করি, BC এবং EF বাহু যথাক্রমে $\triangle ABC$এবং $\triangle DEF$এর বৃহত্তম বাহুদ্বয়। এখন $\triangle ABC$কে $\triangle DEF$এর উপর এমনভাবে স্থাপন করি, যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর ও BC বাহু EF বাহু বরাবর এবং EF রেখার যে পাশে D বিন্দু আছে, A বিন্দু এর বিপরীত পাশে পড়ে। মনে করি, G বিন্দু A বিন্দুর নতুন অবস্থান।

যেহেতু BC = EF, Cবিন্দু F বিন্দুর উপর পড়বে। সুতরাং $\triangle GEF$ হবে $\triangle ABC$এর নতুন অবস্থান। অর্থাৎ, EG = BA, FG = CA ও $\angle EGF=\angle BAC.$

D, G যোগ করি।

(১) $\triangle EGD$-এ EG = ED [কারণ EG = BA = ED] | [ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণ পরস্পর সমান]

অতএব, $\angle EDG=\angle EGD$

(২) $\triangle FGD$ এ $FG = FD$

অতএব, $\angle FDG = \angle FGD$. [ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

(৩) সুতরাং, $\angle EDG + \angle FDG = \angle EGD + \angle FGD$

বা, $\angle EDF = \angle EGF$

অর্থাৎ, $\angle BAC = \angle EDF$

অতএব, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$- এ $AB = DE$, $AC = DF$ । [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDF$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ১০ (কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য)

যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও কোণ সংলগ্ন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও কোণ সংলগ্ন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি,

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ -এ

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ এবং

কোণ সংলগ্ন BC বাহু = অনুরূপ EF বাহু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC = \triangle DEF$.

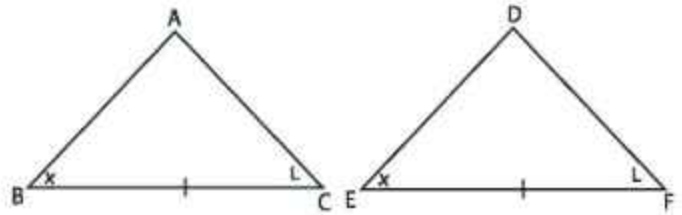
প্রমাণ :

(১) $\triangle ABC$ কে $\triangle DEF$-এর উপর এমনভাবে স্থাপন করি যেন, B বিন্দু E বিন্দুর উপর ও BC বাহু EF বাহু বরাবর এবং EF রেখার যে পাশে D আছে, A বিন্দু যেন ঐপাশে পড়ে।

যেহেতু $BC = EF$, অতএব C বিন্দু F বিন্দুর উপর অবশ্যই পড়বে। [বাহুর সর্বসমতা]

(২) আবার, $\angle B = \angle E$ বলে, BA বাহু ED বাহু বরাবর পড়বে এবং $\angle C = \angle F$ বলে, CA বাহু FD বাহু বরাবর পড়বে। [কোণের সর্বসমতা]

(৩) BA এবং CA বাহুর সাধারণ বিন্দু A, ED ও FD বাহুর সাধারণ বিন্দু D এর উপর পড়বে।

অর্থাৎ, $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ এর উপর সমাপতিত হবে।

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১১ (সমকোণী অতিভুজ-বাহু উপপাদ্য)

দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় সমান হলে এবং একটির এক বাহু অপরটির অপর এক বাহুর সমান হলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ AC =অতিভুজ DF এবং AB = DE. প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC = \triangle DEF$

প্রমাণ :

(১)$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর উপর এমনভাবে স্থাপন করি যেন, B বিন্দু E বিন্দুর উপর, BA বাহু ED বাহু বরাবর এবং C বিন্দু DE এর যে পাশে F বিন্দু আছে এর বিপরীত পাশে পড়ে। ধরি, C বিন্দুর নতুন অবস্থান G।

(২) যেহেতু AB=DE. A বিন্দু D বিন্দুর উপর পড়বে। ফলে $\triangle DEG$ হবে $\triangle DEG$ এর নতুন অবস্থান অর্থাৎ DG =AC. ∠G = ∠C

∠DEG= ∠B = ১ সমকোণ।

(৩) যেহেতু $\angle DEF + \angle DEG =$ ১ সমকোণ + ১ সমকোণ

= ২ সমকোণ = ১

সরলকোণ, GEF একটি সরলরেখা।

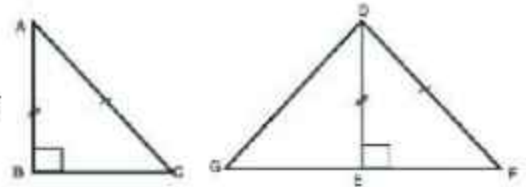
সুতরাং, $\triangle DGF$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। যার DG = DF

সুতরাং, ∠ F= ∠ G= ∠C

(৪) এখন $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর

∠B = ∠E [প্রত্যেকে ১ সমকোণ]

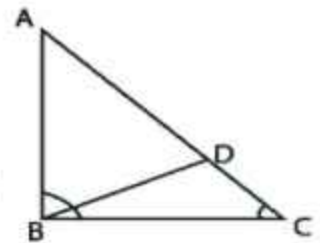
∠ C = ∠ F এবং AB = অনুরূপ DE [কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]

সুতরাং $\triangle \boldsymbol{ABC} \cong \triangle \boldsymbol{DEF}$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১২

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle \boldsymbol{ABC}$ - এ AC > AB.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC > \angle ACB$.

অঙ্কন : AC থেকে AB এর সমান করে AD অংশ কাটি এবং B, D যোগ করি।

প্রমাণ :

(১) $\triangle ABD$ - এ $AB = AD$.

$\therefore \angle ADB = \angle ABD$. [সমদ্বিবাহ ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় সমান।

(২) $\triangle BDC$- এ বহিঃস্থ $\angle ADB > \angle BCD$ [বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর

অতএব, $\angle ABD > \angle BCD$

বা $\angle ABD > \angle ACB$

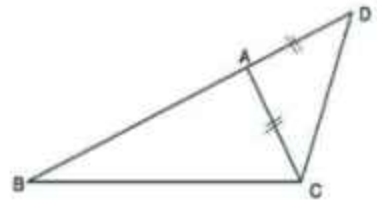
(৩) $\angle ABC > \angle ABD$ [$\angle ABD$ কোণটি $\angle ABC$ এর একটি অংশ]

সুতরাং, $\angle ABC > \angle ACB$(প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ১৪

ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচন : ধরি $\triangle ABC$-এ BC বৃহত্তম বাহু। প্রমাণ করতে হবে যে (AB+AC) > BC

অঙ্কন : BA কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি, যেন AD = AC হয়। C, D যোগ করি।

প্রমাণ :

(১) $\triangle ADC$ - এ $AD = AC$. [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় সমান]

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ $\therefore \angle ACD = \angle BDC$.

(২) $\angle BCD > \angle ACD$.

$\therefore \angle BCD > \angle BDC$.

(৩) $\triangle BCD$এ $\angle BCD > \angle BDC$.

$\therefore BD > BC$. [বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু বৃহত্তর]

(৪) কিন্তু BD = AB + AD = AB + AC [যেহেতু AC = AD]

$\therefore$ (AB + AC) > BC. (প্রমাণিত)

দ্বাদশ অধ্যায়ের সংযুক্তি

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান

দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সরল সমীকরণের সমাধানের পদ্ধতিগুলোর মধ্যে নিচের পদ্ধতি দুইটি আলোচনা করা হলো :

(১) প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Method of Substitution)

(২) অপনয়ন পদ্ধতি (Method of Elimination)

(১) প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে আমরা নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করে সমাধান করতে পারি :

(ক) যেকোনো সমীকরণ থেকে চলক দুইটির একটির মান অপরটির মাধ্যমে প্রকাশ করা ।

(খ) অপর সমীকরণে প্রাপ্ত চলকের মানটি স্থাপন করে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান করা ।

(গ) নির্ণীত সমাধান প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির যেকোনো একটিতে বসিয়ে অপর চলকের মান নির্ণয় করা ।

উদাহরণ ১ । সমাধান কর :

$$x+y=7$$
$$x-y=3$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$x+y=7..............(1)$$
$$x-y=3............(2)$$

সমীকরণ (2) হতে পক্ষান্তর করে পাই,

$$x=y+3...........(3)$$

সমীকরণ (3) হতে x এর মানটি সমীকরণ (1) -এ বসিয়ে পাই,

$y+3+y=7$

বা, $2y=7-3$

বা, $2y=4$

$\therefore\ y=2$

এখন সমীকরণ (3) এ $y=2$ বসিয়ে পাই,

$x=2+3$

$\therefore\ x=5$

নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(5,2)$

[শুদ্ধি পরীক্ষা : সমীকরণ দুইটিতে $x=5$ ও $y=2$ বসালে সমীকরণ (1)-এর বামপক্ষ $= 5+2=7$ = ডানপক্ষ এবং সমীকরণ (2)-এর বামপক্ষ $= 5-2=3$ = ডানপক্ষ ।]

উদাহরণ ২ । সমাধান কর :

$$x+2y=9$$
$$2x-y=3$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$x+2y=9 \text{ ....}(1)$$
$$2x-y=3 \text{ ....}(2)$$

সমীকরণ (2) হতে পাই, $y = 2x-3$ .... (3)

সমীকরণ (1) এ y এর মান বসিয়ে পাই, $x+2(2x-3)=9$

বা, $x+4x-6=9$

বা, $5x=6+9$

বা, $5x=15$

বা, $x=\frac{15}{5}$

$\therefore\ x=3$

এখন x এর মান সমীকরণ (3) -এ বসিয়ে পাই,

$$y=2\times3-3$$
$$=6-3$$
$$=3$$

নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(3,3)$

উদাহরণ ৩ । সমাধান কর :

$$2y+5z=16$$
$$y-2z=-1$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$2y+5z=16 \text{ ....}(1)$$
$$y-2z=-1 \text{ ....}(2)$$

সমীকরণ (2) হতে পাই, $y=2z-1$...........(3)

সমীকরণ (1) এ y এর মান বসিয়ে পাই,

$$2(2z-1)+5z=16$$

বা, $4z-2+5z=16$

বা, $9z=16+2$

বা, $9z=18$

বা, $z=\frac{18}{9}$

$\therefore\ z=2$

এখন z এর মান সমীকরণ (3) এ বসিয়ে পাই,

$y=2\times2-1$

$=4-1$

$\therefore\ y=3$

নির্ণেয় সমাধান $(y,z)=(3,2)$

উদাহরণ ৪ । সমাধান কর :

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$$
$$\frac{4}{x}-\frac{9}{y}=-1$$

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণ

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1\ \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$\frac{4}{x}-\frac{9}{y}=-1\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

$\frac{1}{x}=u$ এবং $\frac{1}{y}=v$ ধরে (1) ও (2) নং সমীকরণ হতে পাই

$$2x+v=3\ \ldots\ldots\ldots(3)$$
$$4u-9v=-1\ \ldots\ldots\ldots(4)$$

(3) নং সমীকরণ হতে পাই

$$v=1-2u\ \ldots\ldots\ldots(5)$$

(4) নং সমীকরণে v এর মান বসিয়ে পাই,

$$4u-9(1-2u)=-1$$

বা, $4u-9+18u=-1$

বা, $22u=9-1$

$$\therefore u = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{4}{11}$

$$\therefore x = \frac{11}{4}$$

এখন, u এর মান (5) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$v = 1 - 2 \times \frac{4}{11} = \frac{11-8}{11}$$

$$\therefore v = \frac{3}{11}$$

বা, $\frac{1}{y} = \frac{3}{11}$

$$\therefore y = \frac{11}{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (\frac{11}{4}, \frac{11}{3})$

(২) অপনয়ন পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করে সমাধান করা যায় :

(ক) প্রদত্ত উভয় সমীকরণকে এমন দুইটি সংখ্যা বা রাশি দ্বারা পৃথকভাবে গুণ করতে হবে যেন যেকোনো একটি চলকের সহগের সাংখ্যিক মান সমান হয় ।

(খ) একটি চলকের সহগ একই চিহ্ন বিশিষ্ট হলে সমীকরণ পরস্পর বিয়োগ, অন্যথায় যোগ করতে হবে । বিয়োগফলকৃত (বা যোগফলকৃত) সমীকরণটি একটি এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ হবে ।

(গ) সরল সমীকরণ সমাধানের নিয়মে চলকটির মান নির্ণয় করা ।

(ঘ) প্রাপ্ত চলকের মান প্রদত্ত যেকোনো একটি সমীকরণে বসিয়ে অপর চলকের মান নির্ণয় করা ।

উদাহরণ ৫ । সমাধান কর :

$$5x - 4y = 6$$
$$x + 2y = 4$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$5x - 4y = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x + 2y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

এখানে সমীকরণ (1) কে 1 দ্বারা এবং সমীকরণ (2) কে 2 দ্বারা গুণ করে পাই,

$$5x - 4y = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$2x + 4y = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(3) ও (4) সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$7x = 14$$

বা, $x = \frac{14}{7}$...............(4)

$\therefore\ x = 2$

সমীকরণ (2) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$$2 + 2y = 4$$

বা, $2y = 4 - 2$

বা, $y = \frac{2}{2}$

$\therefore\ y = 1$

নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 1)$

উদাহরণ ৬। সমাধান কর :

$$x + 4y = 14$$

$$7x - 3y = 5$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$x + 4y = 14$...............(1)

$7x - 3y = 5$...............(2)

সমীকরণ (1) কে 3 দ্বারা এবং সমীকরণ (2) কে 4 দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x + 12y = 42$................(3)

$28x - 12y = 20$...............(4)

$31x = 62$ [যোগ করে]

বা, $x = \frac{62}{31}$

$\therefore\ x = 2$

এখন x এর মান সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে পাই,

$$2 + 4y = 14$$

বা, $4y = 14 - 2$

বা, $4y = 12$

বা, $y = \frac{12}{4}$

$\therefore\ y = 3$

$\therefore\ (x, y) = (2, 3)$

উদাহরণ ৭। সমাধান কর :

$$5x-3y=9$$
$$3x-5y=-1$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$5x-3y=9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$3x-5y=-1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

সমীকরণ (1) কে 5 দ্বারা এবং সমীকরণ (2) কে 3 দ্বারা গুণ করে পাই

$$25x-15y=45 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$9x-15y=-3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$(-) \quad (+) \qquad (+)$$

$16x=48$ [বিয়োগ করে]

বা, $x=\frac{48}{16}$

$\therefore x=3$

সমীকরণ (1) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$5\times 3-3y=9$

বা, $15-3y=9$

বা, $-3y=9-15$

বা, $-3y=-6$

বা, $y=\frac{-6}{-3}$

$\therefore y=2$

$\therefore (x,y)=(3,2)$

উদাহরন ৮।

$$\frac{x}{5}+\frac{3}{y}=3$$
$$\frac{x}{2}-\frac{6}{y}=2$$

সমাধান:

প্রদত্ত সমীকরণ

$$\frac{x}{5}+\frac{3}{y}=3 \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\frac{x}{2}-\frac{6}{y}=2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) সমীকরণকে (2) দ্বারা গুণ করে (2) নং সমীকরণ এর সাথে যোগ করে পাই,

$$\frac{2x}{5} + \frac{6}{y} = 6 \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{6}{y} = 2 \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{x}{2} = 8$$

বা, $\frac{4x+5x}{10} = 8$

বা, $9x = 8 \times 10$

বা, $x = \frac{80}{9}$

(1) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{5} \times \frac{80}{9} + \frac{3}{y} = 3$$

বা, $\frac{16}{9} + \frac{3}{y} = 3$

বা, $\frac{3}{y} = 3 - \frac{16}{9}$

বা, $\frac{3}{y} = \frac{11}{9}$

বা, $\frac{3}{y} = \frac{11}{9}$

বা, $y = \frac{27}{11}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (\frac{80}{9}, \frac{27}{11})$

স্মরণীয় কয়েকজন গণিতবিদ

থেলস

থেলস (625-545 BC) ছিলেন একজন অসাধারণ গ্রিক শিক্ষাবিদ এবং ব্যবসায়ী। তিনিই প্রথম চিন্তা করেন জ্যামিতি দিয়ে অনেক জটিল বিষয়ের সমাধান করা সম্ভব। তিনি সমকোণী ত্রিভুজের সাহায্যে পিরামিডের উচ্চতা বের করে দিয়ে মিশরীয়দের চমক লাগিয়ে দিয়েছিলেন। এটাই পরবর্তীতে ত্রিকোণমিতির উন্নতিতে ভিত্তি স্থাপন করেছিল।

পিথাগোরাস

পিথাগোরাস (প্রায় 582-501 BC) ছিলেন একজন গ্রিক দার্শনিক এবং গণিতবিদ। পিথাগোরাস সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর সম্পর্কের সূত্রের জন্য সারাবিশ্বে পরিচিত (যাকে বলা হয় পিথাগোরাসের সূত্র)। তিনি এমন একটি স্কুল প্রতিষ্ঠা করেন যেখানে গণিত, সঙ্গীত, বিজ্ঞান, দর্শন ও ধর্ম শিক্ষার ব্যবস্থা করা হয়। সংখ্যাতত্ত্ব এবং ত্রিমাত্রিক ও ক্ষেত্রফল সম্পর্কীয় জ্যামিতি শাস্ত্রে পিথাগোরাস অনেক বেশি অবদান রাখেন।

আর্কিমিডিস

আর্কিমিডিস (287 - 212 BC) একজন গ্রিক গণিতবিদ, পদার্থবিজ্ঞানী, প্রকৌশলী, উদ্ভাবক এবং জ্যোতির্বিদ ছিলেন। তাকে প্রাচীনকালের সর্বশ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ হিসাবে বিবেচনা করা হয়। আর্কিমিডিস আধুনিক ক্যালকুলাসের ধারণার সম্ভাবনা দেখেন এবং সূক্ষ্মাতিসূক্ষ্ম মানের প্রয়োগ করেন। আর্কিমিডিসের সবচেয়ে জনপ্রিয় আবিষ্কারগুলোর মধ্যে একটি ছিল অনিয়মিত আকারের বস্তুর আয়তন পরিমাপের পদ্ধতি।

হাইপাশিয়া অব আলেক্সান্দ্রিয়া

হাইপাশিয়া অব আলেক্সান্দ্রিয়া (370-415) ছিলেন প্রথম মহিলা গণিতবিদ যিনি গণিতশাস্ত্রে গুরুত্বপূর্ণ অবদান রাখেন। তার বাবা ছিলেন মিশরের গণিতবিদ ও দার্শনিক থিওন। তিনি 400 সালে আলেক্সান্দ্রিয়ার প্লাটোনিস্ট স্কুলের প্রধান হিসাবে দায়িত্ব পালন করেন। হাইপাশিয়ার বেশিরভাগ কাজই নষ্ট হয়ে যায়। শুধু তার কাজের শিরোনামগুলো উদ্ধার করা সম্ভব হয়েছে। অ্যাস্ট্রোনমিতে তার অনেক অবদান ছিল।

জন নেপিয়ার

জন নেপিয়ার (1550-1617) ছিলেন একজন স্কটল্যান্ডের জমিদার। তিনি 1614 সালে লগারিদমের টেবিলগুলো শ্রেণিবদ্ধ করেন। তার Mirifici Logarithmourn Canonis Descriptio বইটি খ্যাতি ও সম্মান নিয়ে আসে। তার আবিষ্কার গণিতের একটি সম্পূর্ণ নতুন দিক উন্মোচন করে দেয়। এটি দিয়েই গণিতের রেনেসা যুগের সমাপ্তি এবং আধুনিক গণিতের সূচনা হয়।

গ্যালিলিও গ্যালিলেই

গ্যালিলিও গ্যালিলেই (1564-1642) দোলকের সূত্র আবিষ্কার করেন। তিনি টেলিস্কোপের গুরুত্বপূর্ণ উন্নয়ন সাধন এবং বৃহস্পতি গ্রহের উপগ্রহ আবিষ্কার করেন। সকল বস্তুই যে সমত্বরণে ভূপৃষ্ঠে পতিত হয়, এই সত্যটি গ্যালিলিও প্রমাণ করেন এবং আলোর গতি অসীম, এই ধারণাকে সন্দেহ করেন। সর্বোপরি তিনি গতির সূত্রগুলোও আবিষ্কার করেন, যদিও গাণিতিকভাবে সজ্ঞায়িত করতে পারেননি। সৌরজগতের সব গ্রহ সূর্যের চারিদিকে আবর্তন করে, তার এই ধারণাটি গির্জার প্রশাসনের বিরুদ্ধে যাওয়ায় তাঁকে যাবজ্জীবন কারাদন্ড দেওয়া হয়েছিল।

রেনে দেকার্তে

রেনে দেকার্তে (1596-1650) ছিলেন বিখ্যাত ফরাসি গণিতবিদ। 1619 সালের নভেম্বরে যখন তিনি দানিউব নদীর তীরে ক্যাম্পিং করছিলেন, তখন তিনি চিন্তা করেন কী করে জ্যামিতিতে এলজেবরা ব্যবহার করা যেতে পারে। এটা গণিতে নতুন শাখা খুলে দেয়, যার নাম হলো অ্যানালাইটিক্যাল জিওমেট্রি। তিনিই হলেন প্রথম গণিতবিদ যিনি অজানা সংখ্যাকে বর্ণ দ্বারা প্রকাশ করেন এবং $x \times x$ এর পরিবর্তে x^2 লেখার প্রচলন করেন।

সমাপ্ত

২০২৫ শিক্ষাবর্ষ

দাখিল নবম ও দশম : গণিত

একজন ঘুমন্ত মানুষ আরেকজন ঘুমন্ত মানুষকে জাগিয়ে তুলতে পারে না।

–শেখ সাদি